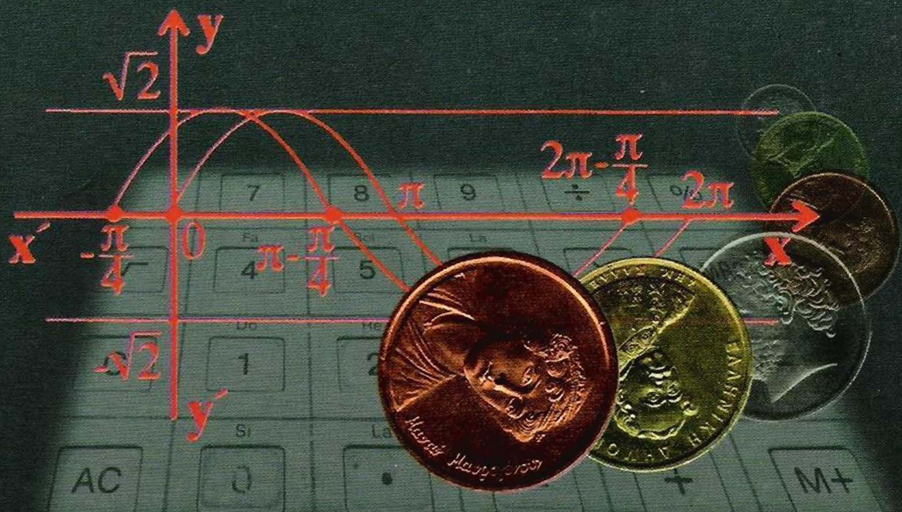
Χ. Κ. ΑΧΤΣΑΛΩΤΙΔΗ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ης δέσμης



ΒΙΒΛΙΟΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε. ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Χ. Κ. Αχτσαλωτίδη

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ης Δέσμης

ΒΙΒΛΙΟΕΚΔΟΤΙΚΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1997

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1-5

- ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
- ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ
- ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ α^x, $\log_\alpha x$

Βασικές γνώσεις

1 Για $\alpha > -1$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει η ανισότητα Bernoulli $(1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\alpha$.

2 Η f είναι αύξουσα στο E, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$

3 Η f είναι φθίνουσα στο E, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$

4 Η f είναι γν. αύξουσα στο E, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

5 Η f είναι γν. φθίνουσα στο E, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

6 Η f είναι **άνω φραγμένη**, όταν υπάρχει $M \in R$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει: $f(x) \leq M$

7 Η f είναι **κάτω φραγμένη**, όταν υπάρχει $M \in R$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει: $f(x) \geq M$

8 Η f είναι **φραγμένη**, όταν υπάρχει $m, M \in R$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει: $m \leq f(x) \leq M$

9 Γενικώς η f είναι φραγμένη στο $E \subseteq A$, αν και μόνο αν,

υπάρχει $k>0$ τέτοιο, ώστε: $|f(x)|\leq k$ για κάθε $x\in E$.

10 Η **f** παρουσιάζει **ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της **A** αν ισχύει: $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.
Το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της **f**.

11 Η **f** παρουσιάζει **μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της **A** αν ισχύει: $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.
Το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της **f**.

12 Μια πραγματική συνάρτηση $f:A\to R$ είναι "**ένα προς ένα**", όταν για κάθε $x_1,x_2\in A$ ισχύει:
αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$
ή ισοδύναμα
αν $f(x_1)=f(x2)$, τότε $x_1=x_2$.

13 Έστω $f:R\to R$ είναι μία "**ένα προς ένα**" συνάρτηση, τότε ισχύουν
i) $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$
ii) $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in A$
iii) $f(f^{-1}(y))=y$ για κάθε $y\in f(A)$

14 Όταν υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$, για τα οποία ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$ τότε προκύπτει ότι η **f** δεν είναι "**ένα προς ένα**".

15 Αν μία συνάρτηση **f** είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι "**ένα προς ένα**".

16 Η αντίστροφη μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

17 Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και για κάθε x, με $x \in U(x_0, \alpha)$ ισχύει: $|f(x)| \leq g(x)$ τότε προκύπτει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

18 Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, $l, m \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in U(x_0, \alpha)$ είναι: $f(x) \geq g(x)$, τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$

19 Αν για κάθε $x \in U(x_0, \alpha)$ ισχύει: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ τότε προκύπτει $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ όπου $l \in \mathbb{R}$.

20 $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

21 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.

22 $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$,

ώστε για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.

23 $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty$

24 Απροσδιόριστες μορφές:

(i) $(+\infty) + (-\infty)$ (ii) $0 \cdot (\pm\infty)$

(iii) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (iv) $\dfrac{0}{0}$

25 Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

26 Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

27 Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής.

28 Οι συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$ είναι συνεχείς.

29 Η συνάρτηση $\sqrt[k]{f}$ είναι συνεχής στο x_0 όταν $f(x_0) \geq 0$.

30 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις:

(i) $f+g$ (ii) $\alpha f, \alpha \in R$ (iii) $f \cdot g$ (iv) $\dfrac{f}{g}$, $g \neq 0$

είναι συνεχείς στο x_0.

31 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε και η σύνθεση $g o f$ είναι συνεχής στο x_0.

32 Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

33 Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ με $f(\alpha)<k<f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=k$.

34 Είναι: $f(\Delta)=[f(\alpha),f(\beta)]$, αν η πραγματική f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και αύξουσα.

35 Είναι: $f(\Delta)=[f(\beta),f(\alpha)]$, αν η πραγματική f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και φθίνουσα.

36 Γενικότερα αν η f είναι συνεχής στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ τότε:

- $f(\Delta)=(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x), \lim\limits_{x\to\beta} f(x))$ αν η f είναι γν. αύξουσα

- $f(\Delta) = (\lim_{x \to \beta} f(x), \lim_{x \to \alpha} f(x))$ αν η f είναι γν. φθίνουσα

37 Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και m, M είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει: $m \leq f(x) \leq M$.

38 Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

39 Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

40 Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$ και $Q(x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta$, $\beta_k \neq 0$ τότε

(i) $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \alpha_\nu \cdot \lim_{x \to +\infty} x^\nu$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_k} \cdot \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\nu}{x^k}$

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση **f:R→R** που ικανοποιεί τη σχέση:

$$m\,f(x-1)+n\,f(-x)=2|x|+1 \quad (1)$$

Να βρεθούν οι **m** και **n** τέτοιοι ώστε η συνάρτηση **f** να πληρεί τις σχέσεις: $f(-2)=5$ και $f(1)=1$.

Λύση

Αν στην (1) θέσουμε x=2, έχουμε

$mf(1)+nf(-2)=5$, δηλαδή $m+5n=5$

Θέτουμε τώρα στην (1) x=-1 και έχουμε

$mf(-2)+nf(1)=3$, δηλαδή $5m+n=3$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} m+5n=5 \\ 5m+\ \ n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+5n=5 \\ -24n=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{11}{12} \\ m=\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Να εξεταστεί αν υπάρχουν συναρτήσεις **f:R→R** οι οποίες να ικανοποιούν τη σχέση: *(1)* $f(x)-f(-x)=x^2$, για κάθε $x\in R$

Λύση

Αν στην *(1)* θέσουμε όπου x το -x έχουμε

$f(-x)-f(x)=x^2$ *(2)*

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις *(1)* και *(2)* έχουμε

$x^2=0$, για κάθε $x\in R$ (άτοπο)

Συνεπώς δεν υπάρχει συνάρτηση f:R→R που να ικανοποιεί τη σχέση *(1)*.

ΘΕΜΑ 3

Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση **f:R→R** η οποία να ικανοποιεί τη σχέση: *(1)* $\mathbf{f(x)+f(n-x)=x}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$, $\mathbf{n\in N^*}$.

Λύση

Θέτουμε στην *(1)* $x=0$ και έχουμε

$f(0)+f(n) = 0$ *(2)*

Θέτουμε τώρα στην *(1)* $x=n$ και έχουμε

$f(n)+f(0)=n$ *(3)*

Αν πολλαπλασιάσουμε την *(2)* επί -1 και προσθέσουμε κατά μέλη τις *(2)* και *(3)* έχουμε

$0=n$, που είναι άτοπο διότι $n\in N^*$

Άρα δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$ που να ικανοποιεί τη σχέση *(1)*.

ΘΕΜΑ 4

Να βρεθεί η συνάρτηση **f:-{0}→R-{0}** που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3} \quad (1)$$

Λύση

Αντικαθιστούμε στην *(1)* όπου x το $\frac{1}{x}$ και έχουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad -4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-2}{x^3} \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις *(1)* και *(2)* κατά μέλη και έχουμε

$$-3f(x)=x^3-\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3x^3}$$

ΘΕΜΑ 5

Να βρεθεί η συνάρτηση **f:R→R** που πληρεί τη σχέση

$$(1)\quad 4\,f(x)+3f(-x)=c\,|x| \quad , \quad c\in R$$

Λύση

Θέτουμε στην *(1)* όπου x το -x και έχουμε

$4f(-x)+3f(x) = c|-x|$

δηλαδή $4f(-x)+3f(x) = c|x|$ *(2)*

Αν πολλαπλασιάσουμε την *(1)* επί -4 και τη *(2)* επί 3 και προσθέσουμε κατά μέλη τις *(1)* και *(2)* έχουμε

$-12f(-x)-16f(x)+12f(-x)+9f(x) = -4c|x|+3c|x|$

Άρα $f(x)=\frac{c\,|x|}{7}$

ΘΕΜΑ 6

Να εξεταστεί αν υπάρχουν συναρτήσεις **f:R→R** που να ικανοποιούν τη σχέση: *(1)* $f(x-1)-f(1-x)=x$, για κάθε $x\in R$.

Λύση

Θέτουμε στην *(1)* x=1 και έχουμε

$f(0)-f(0) = 1$, για κάθε $x\in R$

δηλαδή $0=1$ για κάθε $x\in R$ (άτοπο)

Άρα δεν υπάρχουν συναρτήσεις f:R→R που να πληρούν τη σχέση *(1)*.

ΘΕΜΑ 7

Να βρεθεί η συνάρτηση **$f:R \to R$** που ικανοποιεί τις σχέσεις:

(1) $f(x)f(y)=f(x+y-xy)$

(2) $f(1)\neq 0$

Λύση

Θέτουμε στην *(1)* $y=1$ και έχουμε $f(x)f(1) = f(x+1-x)$
δηλαδή $f(x)f(1) = f(1)$ *(2)*
Επειδή $f(1)\neq 0$ η *(2)* γίνεται $f(x)=1$, για κάθε $x\in R$
Άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.

ΘΕΜΑ 8

Να βρεθεί η συνάρτηση **$f:R \to R$** που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y)-f(x-y)=4xy \quad (1)$$

Λύση

Αν στην *(1)* θεωρήσουμε την αντικατάσταση $y \to x$, έχουμε
$f(2x)-f(0) = 4x^2$ *(2)*
Αν θεωρήσουμε ότι $f(0)=\alpha\in R$ η *(2)* γίνεται
$f(2x) = 4x^2+\alpha$

Θέτουμε όπου x το $\frac{x}{2}$ και έχουμε

$$f(x) = 4\frac{x^2}{4}+\alpha \Rightarrow f(x) = x^2+\alpha$$

ΘΕΜΑ 9

Να βρεθεί η συνάρτηση **f:R→R** που ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f(x)+3f(1-x)=4x-1 \quad (1)$$

Λύση

Θέτουμε στην *(1)* όπου x το 1-x και έχουμε

$$2f(1-x)+3f(1-1+x) = 4(1-x)-1 \quad \Leftrightarrow \quad 2f(1-x)+3f(x) = 3-4x \quad (2)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (1) επί -2 και την *(2)* επί 3 και προσθέσουμε κατά μέλη τις *(1)* και *(2)* έχουμε

$$-4f(x)-6f(1-x)+6f(1-x)+9f(x) = -2(4x-1)+3(3-4x)$$

Δηλαδή $5f(x) = -8x+2+9-12x \quad \Rightarrow \quad f(x)=\dfrac{11-20x}{5}$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x)=\dfrac{11-20x}{5}$

ΘΕΜΑ 10

Να βρεθούν οι συναρτήσεις **f,g:R→R** αν ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(\Sigma)\ \begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2} & (1) \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=x+4 & (2) \end{cases}$$

Λύση

Θέτουμε $\dfrac{x+2}{2}=y+6$, δηαδή $x=2y+10$ και η εξίσωση *(2)* γίνεται

$$f(y+6)+g(2y+15) = 2y+14$$

Άρα το σύστημα (Σ) γίνεται

$$\begin{cases} f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2} \\ f(x+6)+\ g(2x+15)=2x+14 \end{cases}$$

και έχουμε $g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2}-2x-14 \Rightarrow g(2x+15)=-\dfrac{3}{2}x-13$ *(3)*

Θέτουμε $2x+15=y$ και η *(3)* γράφεται

$$g(y)=-\frac{3}{2}\left(\frac{y-15}{2}\right)-13$$

$$g(y)=-\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}$$

Άρα $\boxed{g(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4}}$

$f(x+6)=2x+14-g(2x+15) \Rightarrow f(x+6)=2x+14+\dfrac{3}{2}x+13 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x+6)=\dfrac{7}{2}x+27$ *(4)*

Θέτουμε $x+6=y$ και η *(4)* γίνεται

$f(y)=\dfrac{7}{2}(y-6)+27 \qquad f(y)=\dfrac{7}{2}y+6$

Άρα $\boxed{f(x)=\dfrac{7}{2}x+6}$

ΘΕΜΑ 11

Να βρεθεί η συνάρτηση **f:R→R** που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(1-x)+(1-x)f(x-1)+x-1=0} \quad (1)$$

Λύση

Θέτουμε $1-x=y$ και η *(1)* γίνεται

$f(y)+yf(-y)-y=0$ *(2)*

Αν στη *(2)* θέσουμε όπου y το -y έχουμε

$f(-y)-yf(y)+y=0$ *(3)*

Πολλαπλασιάζοντας την *(3)* επί -y και προσθέτοντας κατά μέλη τις *(2)* και *(3)* έχουμε

$$f(y)+y^2f(y)-y-y^2=0 \Rightarrow f(y)(1+y^2)=y+y^2 \Rightarrow f(y)=\frac{y+y^2}{1+y^2}$$

(4)

Θέτουμε y=x και η *(4)* γράφεται $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

ΘΕΜΑ 12

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ μια συνάρτηση συνεχής τέτοια, ώστε $\mathbf{f(f(x))=x}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0 \in R}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=x_0}$.

Λύση

Έστω ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in R$. Τότε $f(x)>x$ ή $f(x)<x$.

- Αν $f(x)>x$ είναι $f(f(x))>f(x)>x$ (άτοπο)
- Αν $f(x)<x$ τότε $f(f(x))<f(x)<x$ (άτοπο)

Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0$.

ΘΕΜΑ 13

Να βρεθεί η συνάρτηση $\mathbf{f:R-\{0,\alpha\} \to R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: *(1)* $\mathbf{f(x)+f\left(\dfrac{\alpha^2}{\alpha-x}\right)=x}$, όπου $\mathbf{\alpha \in R-\{0\}}$.

Λύση

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x το $\frac{\alpha^2}{\alpha-x}$ και έχουμε

$$f\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-x}\right)+f\left(\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-x}}{\alpha-\frac{\alpha^2}{\alpha-x}}\right)=\frac{\alpha^2}{\alpha-x} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-x}\right)+f\left(\frac{\alpha x-\alpha^2}{x}\right)=\frac{\alpha^2}{\alpha-x} \quad (2)$$

Στην (2) θέτουμε όπου x το $\frac{\alpha^2}{\alpha-x}$ και έχουμε

$$f\left(\frac{\alpha x-\alpha^2}{x}\right)+f(x)=\frac{\alpha x-\alpha^2}{x} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη *(2)* επί -1 και προσθέτοντας κατά μέλη τις *(1)*, *(2)* και *(3)* έχουμε

$$2f(x)=\frac{\alpha x-\alpha^2}{x}+x-\frac{\alpha^2}{\alpha-x} \Rightarrow 2f(x)=\frac{\alpha(x-\alpha)(\alpha-x)+x^2(\alpha-x)-\alpha^2x}{x(\alpha-x)}$$

$$f(x)=\frac{-\alpha(x-\alpha)^2+\alpha x^2-x^3-\alpha^2x}{2x(\alpha-x)} \Rightarrow f(x)=\frac{-\alpha(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\alpha x^2-x^3-\alpha^2x}{2x(\alpha-x)}$$

$$f(x)=\frac{-\alpha x^2+2\alpha^2x-\alpha^3+\alpha x^2-x^3-\alpha^2x}{2x(\alpha-x)} \Rightarrow f(x)=\frac{x^3-\alpha^2x+\alpha^3}{2x(x-\alpha)}$$

$$f(x)=\frac{x^3-\alpha^2x+\alpha^3}{2x(x-\alpha)}$$

ΘΕΜΑ 14

Να βρεθεί η συνάρτηση **f:R-{-1,0,1,2}→R** που ικανοποιεί τη σχέση: $2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=x \quad (1)$

Λύση

Θέτουμε $\frac{x-2}{x+1}=y$ και η *(1)* γίνεται

$$2f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y+2}{1-y} \quad (2)$$

Θέτουμε στη *(2)* όπου y το $\frac{1}{y}$ και έχουμε

$$2f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)=\frac{\frac{1}{y}+2}{1-\frac{1}{y}}=\frac{2y+1}{y-1} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη *(2)* επί -2 και προσθέτοντας κατά μέλη τις *(2)* και *(3)* έχουμε

$$-4f(y)-2f\left(\frac{1}{y}\right)+2f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)=\frac{(-2)(y+2)}{1-y}+\frac{2y+1}{y-1}$$

Δηλαδή $-3f(y)=\frac{2y+4}{y-1}+\frac{2y+1}{y-1} \Rightarrow -3f(y)=\frac{4y+5}{y-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(y)=\frac{4y+5}{3-3y} \quad (4)$$

Αν στην *(4)* θέσουμε y=x έχουμε

$$f(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$$

ΘΕΜΑ 15

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f:R\to R}$ τέτοιες, ώστε $\mathbf{f(f(x))+x=0}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση f τέτοια, ώστε $f(f(x))+x=0$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω ότι $f(x_1) = f(x_2)$

Τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow -x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι "1-1" και άρα γνησίως μονότονη.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα είναι:

για $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε $f(f(x_1))<f(f(x_2))$, οπότε (fof) είναι γνησίως αύξουσα.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι:

για $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$, οπότε $f(f(x_1))<f(f(x_2))$, οπότε (fof) είναι γνησίως αύξουσα.

Συνεπώς η (fof) είναι γνησίως αύξουσα.

Όμως $(fof)(x)=-x$

και η συνάρτηση $g(x)=-x$ είναι γνησίως φθίνουσα (άτοπο).

Άρα δεν υπάρχουν συναρτήσεις f.

ΘΕΜΑ 16

Αν $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ είναι μια δοσμένη συνάρτηση και $\alpha\in\mathbf{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση

(1) $\mathbf{3f(\alpha-x)+2f(x-\alpha)=g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Λύση

Αντικαθιστούμε στη σχέση *(1)*, όπου x το (α-x) και έχουμε

$3f(\alpha-\alpha+x)+2f(\alpha-x-\alpha) = g(\alpha-x)$

δηλαδή $3f(x)+2f(-x) = g(\alpha-x)$ *(2)*

Αν στη *(2)* θέτουμε όπου x το (-x) έχουμε

$3f(-x)+2f(x) = g(\alpha+x)$ *(3)*

Αν πολλαπλασιάσουμε τη (2) επί 3 και την *(3)* επί -2 έχουμε

$9f(x)+6f(-x) = 3g(\alpha-x)$ *(4)*

$-4f(x)-6f(-x) = -2g(\alpha+x)$ *(5)*

Προσθέτουμε κατά μέλη τις *(4)* και *(5)* και έχουμε

$5f(x) = 3g(\alpha-x)-2g(\alpha+x)$

Άρα $f(x)=\dfrac{3g(\alpha-x)-2g(\alpha+x)}{5}$

ΘΕΜΑ 17

Να βρεθεί μια συνάρτηση συνεχής **f:R→R** τέτοια, ώστε:

1) $\mathbf{f(x)-f(\alpha x)=x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R,\ \alpha\in(0,1)}$ δοσμένο

2) $\mathbf{f(0)=\alpha}$

Λύση

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(\alpha x) = x\\
&f(\alpha x)-f(\alpha^2x) = \alpha x\\
&f(\alpha^2x)-f(\alpha^3x) = \alpha^2x\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f(\alpha^{\nu-1}x)-f(\alpha^\nu x) = \alpha^{\nu-1}x
\end{aligned}$$

$$f(x)-f(\alpha^\nu x) = x(1+\alpha+\ldots+\alpha^{\nu-1})$$

Όμως $\alpha\in(0,1)$, οπότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha^\nu x=0$

$$\lim_{\nu\to\infty}[f(x)-f(\alpha^\nu x)]=\lim_{\nu\to\infty}x(1+\alpha+\ldots+\alpha^{\nu-1}) \Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(0) = x\frac{1}{1-\alpha} \Leftrightarrow f(x) = \alpha+\frac{x}{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{\alpha-\alpha^2+x}{1-\alpha}$$

ΘΕΜΑ 18

Έστω η συνάρτηση **f:R→[-1,1]** με την ιδιότητα ότι για κάθε

$x \in \mathbf{R}$, υπάρχει $\alpha \neq 0$ τέτοιος, ώστε:

$$(1) \quad f(x+\alpha) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

Να δειχθεί ότι η **f** είναι περιοδική.

Λύση

Πρέπει $f(x)-[f(x)]^2 \geq 0 \Leftrightarrow [f(x)]^2 - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \in [0,1]$

Όμως από τη σχέση *(1)* έχουμε $f(x) = \frac{1}{2}$

Άρα $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Να υπολογίσουμε τώρα την $f(x+2\alpha)$

Έχουμε $f(x+2\alpha) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+\alpha) - [f(x+\alpha)]^2} =$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} - f(x) + [f(x)]^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + [f(x)]^2 - f(x)} = \frac{1}{2} + \sqrt{[\frac{1}{2} - f(x)]^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{[f(x) - \frac{1}{2}]^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

Παρατηρούμε ότι $f(x+2\alpha) = f(x)$, για κάθε $x \in R$ και $\alpha \in R^*$.
Συνεπώς ο 2α είναι περίοδος της f.

ΘΕΜΑ 19

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f: R-\{0,1\} \to R}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in \mathbf{R-\{0,1\}}$ υπάρχει $\mathbf{p>0}$ τέτοιος, ώστε: $\mathbf{f(x+p) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}$.

Να δειχθεί ότι η **4p** είναι περίοδος της **f**.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $f(x+4p) = f(x)$, για κάθε $x\in R-\{0,1\}$

Έχουμε $f(x+4p) = f(x+3p+p) = \dfrac{1+f(x+3p)}{1-f(x+3p)} =$

$$= \frac{1+\dfrac{1+f(x+2p)}{1-f(x+2p)}}{1-\dfrac{1+f(x+2p)}{1-f(x+2p)}} = \frac{1-f(x+2p)+1+f(x+2p)}{1-f(x+2p)-1-f(x+2p)} =$$

$$= \frac{2}{-2f(x+2p)} = -\frac{1}{f(x+2p)} = -\frac{1}{\dfrac{1+f(x+p)}{1-f(x+p)}} = \frac{-(1-f(x+p)}{1+f(x+p)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}-1}{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{1+f(x)-1+f(x)}{1-f(x)+1+f(x)} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

ΘΕΜΑ 20

Έστω η συνάρτηση **$f:C\to R$** με **$f(z)=|z|$**. Να εξεταστεί αν η **f** είναι "**1-1**".

Λύση

Έστω $z_1=i$ και $z_2=-i$.

Έχουμε $z_1,z_2\in C$ και $z_1\neq z_2$

Έχουμε

$f(z_1)=|z_1|=|i|=1$ και $f(z_2)=|z_2|=|-i|=1$

Αφού υπάρχουν $z_1,z_2\in C$, $z_1\neq z_2$ τέτοιοι, ώστε

$f(z_1)=f(z_2)$

προκύπτει ότι η f δεν είναι "1-1".

ΘΕΜΑ 21

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ με $\mathbf{f(f(x))=x^2-x+1}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$. Αποδείξτε ότι η $\mathbf{f(1)=1}$.

Λύση

Για $x=1 \Rightarrow f(f(1))=1$ και

για $x=f(1) \Rightarrow f(f(f(1)))=f^2(1)-f(1)+1$

Επειδή

$$f(f(1))=1 \Rightarrow f(1)=f^2(1)-f(1)+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(1)-2f(1)+1=0 \Rightarrow (f(1)-1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=1 .$$

ΘΕΜΑ 22

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f:R \to R}$ με $\mathbf{f(x)=\alpha x^{2\nu}+bx^{2\nu-1}+c}$ όπου $\mathbf{\alpha,b,c \in R-\{0\}}$ και $\mathbf{n \in N^*}$. Να δειχθεί ότι η $\mathbf{f}$ δεν είναι "**1-1**"

Λύση

Για $x_1=0$ και $x_2=-\dfrac{b}{\alpha}$, έχουμε

$$f(x_1)=c \quad \text{και} \quad f(x_2)=\alpha\left(-\frac{b}{\alpha}\right)^{2\nu}+b\left(-\frac{b}{\alpha}\right)^{2\nu-1}+c$$

$$f(x_2)=\alpha\frac{b^{2\nu}}{\alpha^{2\nu}}+\frac{b\,(-b)^{2\nu-1}}{\alpha^{2\nu-1}}+c=\frac{b^{2\nu}}{\alpha^{2\nu-1}}-\frac{b^{2\nu}}{\alpha^{2\nu-1}}+c=c$$

Άλλα $x_2 \neq 0$, διότι $b \neq 0$, οπότε $x_2 \neq x_1$. Αφού υπάρχουν $x_1,x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$ για τα οποία $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτει ότι η f δεν είναι "1-1".

ΘΕΜΑ 23

Να εξεταστεί αν το άθροισμα δυο συναρτήσεων που δεν είναι **"1-1"** είναι μια συνάρτηση που δεν είναι **"1-1"**.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:R \to R$ με $f(x)=x-x^2$ και $g(x)=x+x^2$.
Ας εξετάσουμε αν οι συναρτήσεις f και g είναι "1-1".
Για $x_1=1$ και $x_2=0$, έχουμε $f(x_1)=f(x_2)=0$.
Άρα η f δεν είναι "1-1".
Για $x_1=-1$ και $x_2=0$ έχουμε $g(x_1)=g(x_2)=0$.
Άρα η g δεν είναι "1-1".
Έχουμε επίσης $f(x)+g(x) = 2x$
Όμως η συνάρτηση (f+g) είναι "1-1".
Συνεπώς το άθροισμα δύο συναρτήσεων που δεν είναι "1-1" μπορεί να είναι μια συνάρτηση "1-1".

ΘΕΜΑ 24

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:[0,2]\to[0,4]}$ με $\mathbf{f(x)=x^2}$. Να δειχθεί ότι η **f** είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $\mathbf{f^{-1}}$.

Λύση

Για κάθε $x_1,x_2 \in [0,2]$, αν

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow (x_1-x_2)\underbrace{(x_1+x_2)}_{>0}=0$$

Άρα αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$. Συνεπώς η f είναι "1-1".
Έχουμε επίσης $f([0,2])=[0,4]$.
Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f η οποία είναι

$$f^{-1}:[0,4]\to[0,2] \quad \text{με} \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

ΘΕΜΑ 25

Θεωρούμε τη συνάρτηση **$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$** . Έστω ότι **$f(x)\neq 0$**, για κάθε **$x\in\mathbf{R}$**. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση **$F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$** με **$F(x)= f(2x)+f(3x)$** είναι διαφορετική από το μηδέν για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ με

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{αν } x\in(-\infty,2] \\ -2 & \text{αν } x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$. Έχουμε

$$f(2x)=\begin{cases} 2 & \text{αν } x\in(-\infty,1] \\ -2 & \text{αν } x\in(1,\infty) \end{cases}$$

$$f(3x)=\begin{cases} 2 & \text{αν } x\in\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right] \\ -2 & \text{αν } x\in\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right) \end{cases}$$

Άρα έχουμε $F(x)=\begin{cases} 4 & \text{αν } x\in(-\infty,\frac{2}{3}] \\ 0 & \text{αν } x\in(\frac{2}{3},1] \\ -4 & \text{αν } x\in(1,+\infty) \end{cases}$

Συνεπώς $F(x)=0$ για $x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]$.

Με αυτό το παράδειγμα δείξαμε ότι αν $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$,

$F(x) = f(2x)+f(3x)$

δεν είναι πάντα διαφορετική από το μηδέν.

ΘΕΜΑ 26

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ με $\mathbf{f(x)=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}}$. Να δειχθεί ότι:

(i) Για $\mathbf{x\geq 2}$ η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) $\mathbf{f(x)\in[0,1]}$ αν $\mathbf{x\geq\dfrac{3}{4}}$.

Λύση

(i) Για $x\geq 2$ η f γράφεται $f(x)=\dfrac{(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}$

Αν $x_1>x_2\geq 2$ έχουμε

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-2}{\sqrt{x_1^2+1}}-\frac{x_2-2}{\sqrt{x_2^2+1}}=\frac{(x_1-2)\sqrt{x_2^2+1}-(x_2-2)\sqrt{x_1^2+1}}{\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}}$$

Όμως $(x_1-2)^2(x_2^2+1)-(x_2-2)^2(x_1^2+1)=(x_1-x_2)(-3(x_1+x_2)+4x_1x_2-4)=$
$=(x_1-x_2)(4x_1x_2-3(x_1+x_2)-4)>0$. Το $4x_1x_2>8x_v$ άρα
$4x_1x_2-3(x_1+x_2)-4>8x_1-3x_1-3x_2-4=5x_1-3x_2-4=2x_1+3x_1-3x_2-4=$
$=2x_1+3(x_1-x_2)-4=2(x_1-2)+3(x_1-x_2)>0$

Άρα για $x_1>x_2\geq 2$ έχουμε

$(x_1-2)^2(x_2^2+1)>(x_2-2)^2(x_1^2+1)$ οπότε έχουμε

$(x_1-2)\sqrt{x_2^2+1}>(x_2-2)\sqrt{x_1^2+1}$

Άρα για $x_1>x_2\geq 2$ έχουμε $f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,\infty)$

(ii) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}}=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3+1}{x^2+1}}=$

$$=\sqrt{\frac{x^2+1+(3-4x)}{x^2+1}}=\sqrt{1+\frac{3-4x}{x^2+1}}$$

Όμως για $x \geq \frac{3}{4}$ έχουμε 3-4x≤0, οπότε $1+\frac{3-4x}{x^2+1} \leq 1$

Συνεπώς $f(x) \in [0,1]$.

ΘΕΜΑ 27

Έστω οι συναρτήσεις **f:R→R** με **f(x)=x²** και **g(x)=|x|**. Να δειχθεί ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right) \quad \text{και}$$

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(g(x_1)+g(x_2)\right)$$

Λύση

Έχουμε $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) - \frac{(x_1+x_2)^2}{4} =$

$$\frac{2x_1^2+2x_2^2-x_1^2-x_2^2-2x_1x_2}{4} = \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}{4} = \frac{(x_1-x_2)^2}{4} \geq 0$$

Άρα $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

Επίσης είναι

$$\frac{1}{2}[g(x_1)+g(x_2)] - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}[|x_1|+|x_2|] - \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| =$$

$\frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|) - |x_1+x_2|] \geq 0$ (διότι $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Συνεπώς $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[g(x_1)+g(x_2)]$

ΘΕΜΑ 28

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to R$ με $f(x)=-\log(x+1)$.
Να δειχθεί ότι για κάθε $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$ ισχύει η σχέση:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Λύση

Έχουμε την ανισότητα

$$\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}<\frac{1+x_1+1+x_2}{2}=1+\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{για κάθε} \quad x_1,x_2\in(-1,\infty)$$

Άρα $\log\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}<\log\left(1+\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

δηλαδή $\frac{1}{2}[\log(1+x_1)+\log(1+x_2)]<\log\left(1+\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{\log(1+x_1)+\log(1+x_2)}{2}>-\log\left(1+\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

δηλαδή $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 29

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,\infty)\to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,\infty)$ *(1)*

(i) Να υπολογιστεί η $f(1)$.

(ii) Να δειχθεί ότι $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,\infty)$

(iii) Να δειχθεί ότι $\mathbf{f(x^{\varrho})=\varrho f(x)}$ για κάθε $\varrho \in \mathbf{Q}$ και $\mathbf{x} \in (0,\infty)$

Λύση

(i) Αν στην (1) θέσουμε $x=y=1$ έχουμε

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

(ii) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x το $\frac{x}{y} \in (0,\infty)$ και έχουμε

$$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \quad \text{για κάθε } x,y\in(0,\infty)$$

(iii) I. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι

$f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ *(2)* για κάθε $x\in(0,\infty)$ και $\varrho\in N$

Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Για $\varrho=1$ έχουμε $f(x)=1f(x)$
- Υποθέτουμε ότι $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ και θα αποδείξουμε ότι $f(x^{\varrho+1})=(\varrho+1)f(x)$

$$f(x^{\varrho+1})=f(x\cdot x^{\varrho})=f(x)+f(x^{\varrho})=f(x)+\varrho f(x)=(\varrho+1)f(x)$$

Άρα $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in N$

II. Θα αποδείξουμε τώρα ότι $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in Z$, $x\in(0,\infty)$

Αν $\varrho<0 \Rightarrow -\varrho>0$. Τότε έχουμε

$$f(x^{-\varrho})=(-\varrho)f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x^{\varrho}}\right)=(-\varrho)f(x) \Rightarrow f(1)-f(x^{\varrho})=(-\varrho)f(x) \Rightarrow$$

$f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in Z$

Άρα $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in Z$.

III. Θα αποδείξουμε ότι $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in Q\cap(0,\infty)$

Έχουμε $\varrho=\frac{m}{n}$, $m,n\in N^*$

Έχουμε $f(x)=f\left[\left(x^{1/n}\right)^{n}\right]=n\,f\left(x^{1/n}\right)$ για κάθε $n\in N^*$

Άρα $f\left(x^{1/n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)f(x)$ για κάθε $n\in N^*$

Συνεπώς $f(x^{\varrho})=f\left(x^{m/n}\right)=f\left[\left(x^{m}\right)^{1/n}\right]=\frac{1}{n}f\left(x^{m}\right)=\frac{m}{n}f(x)=\varrho f(x)$

Άρα $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in(0,\infty)\cap Q$.

VI. Αν $\varrho\in(-\infty,0)\cap Q$, έχουμε $-\varrho\in Q\cap(0,\infty)$ οπότε

$$f(x^{-\varrho})=(-\varrho)f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x^{\varrho}}\right)=(-\varrho)\,f(x) \Rightarrow$$

$$f(1)-f(x^{\varrho})=(-\varrho)f(x) \Rightarrow \varrho f(x)=f(x^{\varrho}) \quad \text{για κάθε } \varrho\in Q\cap(-\infty,0)$$

Συνεπώς $f(x^{\varrho})=\varrho f(x)$ για κάθε $\varrho\in Q$ και $x\in(0,\infty)$.

ΘΕΜΑ 30

Θεωρούμε την άρτια συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{f(x+y)\le f(x)+f(y)}$ *(1)* για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$. Να δειχτεί ότι $\mathbf{f(x)\ge 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Λύση

Αφού η f είναι άρτια έχουμε για κάθε $x\in R$, $-x\in R$ και $f(-x)=f(x)$

Αν στην *(1)* θέσουμε $x=y=0$ έχουμε

$$f(0)\le f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)\ge 0 \quad (2)$$

Αν στην *(1)* θεωρήσουμε την αντικατάσταση $y\to -x$ έχουμε

$$f(0)\le f(x)+f(-x) \Rightarrow f(0)\le f(x)+f(x) \Rightarrow 2f(x)\ge f(0) \quad (3)$$

Από τις *(2)* και *(3)* προκύπτει ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$.

ΘΕΜΑ 31

Να βρεθεί τις συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{f(x+4)=x^2-\frac{1}{x}} \quad \text{και} \quad \mathbf{g(2x+3)=x^3} \quad \text{για κάθε } \mathbf{x\in R}.$$

Λύση

Έχουμε $f(x+4)=x^2-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in R$ *(1)*

Αντικαθιστούμε στην *(1)* όπου x το x-4 και έχουμε

$$f(x-4+4)=(x-4)^2-\frac{1}{x-4} \Rightarrow f(x)=(x-4)^2-\frac{1}{x-4}$$

Έχουμε $g(2x+3)=x^3$ για κάθε $x\in R$ *(2)*

Αντικαθιστούμε στη *(2)* όπου x το $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)$ και έχουμε

$$g\left(2\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)+3\right)=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow g(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)^3$$

Άρα $f(x)=(x-4)^2-\frac{1}{x-4}$ και $g(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{8}$

ΘΕΜΑ 32

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1,f_2,f_3:R\rightarrow R$. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις f_1^{-1} και f_2^{-1} και ισχύει η σχέση:

(1) $(f_1 \circ f_2^{-1})(x)=(f_2 \circ f_1^{-1})(x)$ για κάθε $x\in R$

να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ αν ισχύει η σχέση

(2) $\alpha(f\circ f_1)(x)+b(f\circ f_2)(x)=f_3(x)$ για κάθε $x\in R$,

$\alpha b\in R-\{0\}$, $\alpha^2-b^2\neq 0$

Λύση

Η *(2)* γράφεται $af(f_1(x))+bf(f_2(x))=f_3(x)$ *(3)*

Αν στην *(3)* θέσουμε όπου x το $(f_2^{-1} \circ f_1)(x)$ έχουμε

$$af(f_1(f_2^{-1}(f_1(x))))+bf(f_2(f_2^{-1}(f_1(x)))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(x)))$$

Δηλαδή $af(f_1(f_2^{-1}(f_1(x))))+bf(f_1(x)) = f_3(f_2^{-1}(f_1(x)))$ *(4)*

Όμως $(f_1 \circ f_2^{-1}) = (f_2 \circ f_1^{-1})$ οπότε $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_1 = f_2$

Άρα η (4) γράφεται

$$af(f_2(x))+bf(f_1(x)) = f_3(f_2^{-1}(f_1(x))) \quad (5)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την *(3)* επί α και την *(5)* επί -b έχουμε

$$(\alpha^2-b^2)f(x) = \alpha(f_3 \circ f_1^{-1})(x) - b(f_3 \circ f_2^{-1})(x)$$

Όμως $\alpha^2-b^2 \neq 0$ οπότε

$$f(x) = \frac{\alpha(f_3 \circ f_1^{-1})(x) - b(f_3 \circ f_2^{-1})(x)}{\alpha^2 - b^2}$$

ΘΕΜΑ 33

Να βρεθεί το όριο: $L_1 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2\nu}} \left(\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} \right)^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}}$ όπου $\nu \in N$

Λύση

$$L_1 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2\nu}} \left[1 + \left(\frac{\eta\mu x}{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2\nu}} \left(1 + \frac{\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} \right)^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2\nu}} \left(1 + \frac{\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} \right)^{\frac{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} \cdot \frac{\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu \frac{\pi}{2\nu}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \frac{\eta\mu x-\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \frac{2\eta\mu\frac{x-\frac{\pi}{2\nu}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+\frac{\pi}{2\nu}}{2}}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}} =$$

$$= e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \frac{\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2\nu}\right)}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}} = e^{2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}} =$$

$$= e^{2\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}\cdot\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}}{\frac{\pi}{2}-\nu x}} =$$

$$= e^{2\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4\nu}}{\frac{\pi}{2}-\nu x}} = e^{2\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\left(\frac{2\nu x-\pi}{4\nu}\cdot\frac{2}{\pi-2\nu x}\right)} =$$

$$= e^{2\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\left(\frac{-1}{2\nu}\cdot\frac{\pi-2\nu x}{\pi-2\nu x}\right)} = e^{-\frac{1}{\nu}\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}} \quad \text{Άρα} \quad L_1 = e^{-\frac{\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\nu}}$$

ΘΕΜΑ 34

Να βρεθούν τα όρια: (i) $L_1 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\eta\mu(x-\frac{\pi}{4})}}$

(ii) $L_2 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (\sqrt{3}\ \varepsilon\varphi x)^{\varepsilon\varphi 3x}$

Λύση

(i) $L_1 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} [1 + (\varepsilon\varphi x - 1)]^{\frac{1}{\varepsilon\varphi x - 1} \cdot \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{1} \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\eta\mu x\, \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\eta\mu \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$. Άρα $\boxed{L_1 = e^2}$

(ii) $L_2 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} [1 + (\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1)]^{\frac{1}{\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1} \cdot \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1}{1} \cdot \varepsilon\varphi 3x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \varepsilon\varphi 3x(\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1)}$$

Όμως $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1)\,\varepsilon\varphi 3x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1) \cdot \dfrac{\varepsilon\varphi x + \dfrac{2\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x}}{1 - \varepsilon\varphi x \cdot \dfrac{2\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x}}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x(3 - \varepsilon\varphi^2 x)}{1 - \varepsilon\varphi^2 x - 2\varepsilon\varphi^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\varepsilon\varphi x\,(3 - \varepsilon\varphi^2 x)}{(1 - \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x)\,(1 + \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x)}\,(\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1) =$$

$$= -\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\varepsilon\varphi x\,(3 - \varepsilon\varphi^2 x)}{1 + \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3 - \frac{1}{3}\right)}{1 + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3}}{2} = -\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

Άρα $L_2 = e^{-\frac{4}{3\sqrt{3}}}$

ΘΕΜΑ 35

Να βρεθεί το όριο:

$$\mathbf{L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}}\right)^A} \quad \text{όπου} \quad \mathbf{A = \frac{1}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}}}$$

Λύση

Το Α ορίζεται για $x > \frac{\pi}{4}$. Για $x > \frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}}\right)^A = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{2}}\right)^A = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{2\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\right)^A =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left[\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^A = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left[1 - (1 - \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^A =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \left[1 - 2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]^A =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\left[1-2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]^{\frac{1}{-2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\cdot\frac{-2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{1}\cdot A} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{-2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{x-\pi/4}}}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\dfrac{-2\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}=-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\dfrac{\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)^2}\cdot\dfrac{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)^2}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}=$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2-1/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3/2}=0$$

Άρα $L = e^0 = 1$

ΘΕΜΑ 36

Να βρεθούν τα όρια: (i) $E=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\mu\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}}{1+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}\right)^x$

(ii) $$L=\lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x+\ldots+\eta\mu^2 \nu x\right)^{\frac{1}{\nu^3 x^2}}\right)$$

Λύση

(i) $$E=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\mu\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}{1+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}\right)^{\frac{1+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}{-\left(\mu\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}\right)}\cdot\frac{-x\left(\mu\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}\right)}{1+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x\left(\mu\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}\right)}{1+\nu\,\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}}=e^{-\mu\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{x}}{\frac{\alpha}{x}}\cdot\alpha\right)-\nu\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{\beta}{x}}{\frac{\beta}{x}}\cdot\beta\right)}=$$

$$=e^{-\mu\alpha-\nu\beta}=e^{-(\mu\alpha+\nu\beta)}$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x+\ldots+\eta\mu^2 \nu x\right)^{\frac{1}{\nu^3 x^2}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x+\ldots+\eta\mu^2 \nu x}{\nu^3 x^2}}=e^{\frac{1}{\nu^3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}+\ldots+\frac{\eta\mu^2 \nu x}{x^2}\right)}=$$

$$=e^{\frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)}=e^{\frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}$$

$$L=\lim_{\nu\to\infty}\left(e^{\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^3}}\right)=e^{\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^3}}=$$

$$=e^{2/6}=e^{1/3}$$

Άρα $L=e^{1/3}$

ΘΕΜΑ 37

Να βρεθεί το όριο:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^p+1}{x^q-1}\right)^{kx-\sqrt{x^2-2x}} \quad \text{όπου} \quad p,q,k\in N^*$$

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^p+1}{x^q-1}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } p>q\\ 0, & \text{αν } p<q\\ 1, & \text{αν } p=q\end{cases}$

$$\lim_{x\to\infty}(kx-\sqrt{x^2-2x})=\lim_{x\to\infty}x\left(k-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{όταν } k>1\\ 1, & \text{όταν } k=1\end{cases}$$

Άρα

$$L=\begin{cases}+\infty, & \text{όταν } p>q \text{ και } k\geq 1\\ 0, & \text{όταν } p<q \text{ και } k=1\\ 1, & \text{όταν } p=q \text{ και } k=1\end{cases}$$

Πρέπει να βρούμε τώρα το όριο στην περίπτωση που p=q και k>1. Έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^p+1}{x^q-1}\right)^{xk-\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^p+1}{x^q-1}\right)^{x\left(k-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^p-1}\right)^{\frac{x^p-1}{2}\cdot\frac{2x\left(k-\sqrt{1-2/x}\right)}{x^p-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\left(k-\sqrt{1-2/x}\right)}{x^p-1}}=$$

$$\begin{cases}e^{2(k-1)}, & \text{όταν } p=1\\ e^0=1, & \text{όταν } p>1\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 38

Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{\varepsilon\varphi \frac{\pi x}{2}}$

Λύση

$$x^{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}} = \left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{(x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}}$$

$$\lim_{x \to 1} (x)^{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\left[(1+(x-1))^{\frac{1}{x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}}$$

Έστω $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}$ θέτουμε x-1=y, οπότε όταν $x\to 1 \Rightarrow y\to 0$

$$L = \lim_{y\to 0}\frac{y\,\eta\mu\frac{\pi(y+1)}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(y+1)}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{y\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi y}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi y}{2}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{y\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi y}{2}}{-\eta\mu\frac{\pi y}{2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{-\eta\mu\frac{\pi y}{2}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}}{\eta\mu\frac{\pi y}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} (x)^{\varepsilon\varphi\,\pi x/2} = e^{-2/\pi}$

ΘΕΜΑ 39

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim_{x \to \alpha} (1 + x^{\nu} - \alpha^{\nu})^{\frac{1}{x-\alpha}}$, $\nu \in N$, $\alpha \neq 0$

(ii) $\lim_{\nu \to \infty} \left[\lim_{x \to \infty} \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{x-k}{x+k} \right)^{x} \right]$

Λύση

(i) Θέτουμε x^{ν}-α^{ν}=y, οπότε όταν x→α ⇒ y→0 και $x = \sqrt[\nu]{y + \alpha^{\nu}}$

$$\lim_{x \to \alpha} (1 + x^{\nu} - \alpha^{\nu})^{\frac{1}{x-\alpha}} = \lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y} \cdot \frac{y}{\sqrt[\nu]{y+\alpha^{\nu}} - \alpha}} =$$

$$= e^{\lim_{y \to 0} \frac{y}{\sqrt[\nu]{y+\alpha^{\nu}} - \alpha}} = e^{\lim_{y \to 0} \frac{y\left(\sqrt[\nu]{(y+\alpha^{\nu})^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{(y+\alpha^{\nu})^{\nu-2}} \cdot \alpha + \ldots + \alpha^{\nu-1}\right)}{\sqrt[\nu]{y+\alpha^{\nu}} - \alpha}}$$

$$e^{\lim_{y \to 0} \left(\sqrt[\nu]{(y+\alpha^{\nu})^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{(y+\alpha^{\nu})^{\nu-2}} \cdot \alpha + \ldots + \alpha^{\nu-1}\right.} = e^{\nu \cdot \alpha^{\nu-1}}$$

(ii) $$\lim_{x \to \infty} \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{x-k}{x+k} \right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \frac{-2k}{x+k} \right)^{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \prod_{k=1}^{\nu} \left[\left(1 + \frac{-2k}{x+k} \right)^{\frac{x+k}{-2k} \cdot \frac{-2k}{x+k} \cdot x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-2 \cdot 1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{-2 \cdot 1} \cdot \frac{-2 \cdot 1}{x+1} \cdot x} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-2 \cdot 2}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{-2 \cdot 2} \cdot \frac{-2 \cdot 2}{x+2} \cdot x} \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2\cdot\nu}{x+\nu}\right)^{\frac{x+\nu}{-2\nu}\cdot\frac{-2\nu}{x+\nu}\cdot x}=e^{-2\cdot 1}\cdot e^{-2\cdot 2}\cdots e^{-2\cdot\nu}=$$

$$=e^{-2(1+2+\ldots+\nu)}=e^{-2\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}}=e^{-\nu(\nu+1)}$$

Άρα $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{\nu}\left(\frac{x-k}{x+k}\right)^{x}\right]=\lim\limits_{\nu\to\infty} e^{-\nu(\nu+1)}=0$

ΘΕΜΑ 40

Να βρεθεί το όριο: $L_1=\lim\limits_{x\to\pi}(\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x)^{\frac{1}{(x-\pi)^2}}$

Λύση

$$\lim_{x\to\pi}(\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x)^{\frac{1}{(x-\pi)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}[1+(-1+\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x)^{\frac{1}{-1+\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x}\cdot\frac{-1+\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x}{(x-\pi)^2}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-1+\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x}{(x-\pi)^2}}=e^{-L}$$

Έστω $L=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu 10x\sigma\upsilon\nu 30x}{(x-\pi)^2}$

Θέτουμε x-π=y, οπότε όταν $x\to\pi \Rightarrow y\to 0$

Έχουμε

$$L=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 8y\sigma\upsilon\nu 10y\sigma\upsilon\nu 30y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{4-4\sigma\upsilon\nu 8y\sigma\upsilon\nu 10y\sigma\upsilon\nu 30y}{4y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{4-2\sigma\upsilon\nu 8y(\sigma\upsilon\nu 40y+\sigma\upsilon\nu 20y)}{4y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{4-2\sigma\upsilon\nu 8y\sigma\upsilon\nu 40y-2\sigma\upsilon\nu 8y\sigma\upsilon\nu 20y}{4y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{4-\sigma\upsilon\nu 48y-\sigma\upsilon\nu 32y-\sigma\upsilon\nu 28y-\sigma\upsilon\nu 12y}{4y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\eta\mu^2 24y+2\eta\mu^2 16y+2\eta\mu^2 14y+2\eta\mu^2 6y}{4y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 24y}{2\,(24y)^2}\cdot 24^2\right)+\lim_{y\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 16y}{(16y)^2}\cdot\frac{16^2}{2}\right)+\lim_{y\to 0}\left[\frac{\eta\mu^2 14y}{(14y)^2}\cdot\frac{14^2}{2}\right]+$$

$$+\lim_{y\to 0}\left[\frac{\eta\mu^2 6y}{(6y)^2}\cdot\frac{6^2}{2}\right]=\frac{24^2+16^2+14^2+6^2}{2}=532$$

Άρα $\boxed{L_1 = e^{-532}}$

ΘΕΜΑ 41

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}\right)^{2^\nu}$

(ii) $\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)^{\sigma\varphi x}$ (iii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x$

Λύση

(i) $$\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}\right)^{2^\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}\right)^{\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}}\cdot\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}\cdot 2^\nu}=$$

$$= e^{\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}}{\frac{x}{2^\nu}}\cdot x} = e^{1\cdot x} = e^x$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)^{\sigma\varphi x} = \lim_{x\to 0}[1+(\sigma\upsilon\nu x-1)]^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{1}\cdot\sigma\varphi x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x-1)\sigma\varphi x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu^2 x/2\;\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x/2\;\sigma\upsilon\nu x/2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{\eta\mu x/2\;\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x/2}} = e^0 = 1$$

(iii) $$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2+3x+4-x^2-2x-3}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x^2-2x-3}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x^2-2x-3}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^{\frac{x^3+2x^2+3x+4}{-x^2-2x-3}\cdot A}$$

$$A = \frac{-x^2-2x-3}{x^3+2x^2+3x+4}\cdot x \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} A = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-2x^2-3x}{x^3+2x^2+3x+4} = -1$$

Άρα $L = e^{\lim\limits_{x\to\infty} A} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ΘΕΜΑ 42

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \nu\left(\eta\mu\frac{\nu x+1}{\nu} - \eta\mu x\right)$ (ii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x}$

Λύση

(i) $$\lim_{x\to\infty} \nu\left(\eta\mu\frac{\nu x+1}{\nu}-\eta\mu x\right)=\lim_{x\to\infty} \nu\cdot 2\eta\mu\frac{\frac{\nu x+1}{\nu}-x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\nu x+1}{\nu}+x}{2}=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left(\nu\cdot\eta\mu\frac{\nu x+1-\nu x}{2\nu}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu x+1+\nu x}{2\nu}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left(\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{2\nu}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu x+1}{2\nu}\right)=$$

$$=2\lim_{\nu\to\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{2\nu}}{\frac{1}{2\nu}}\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\nu x+1}{2\nu}\right)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{2\nu}}{\frac{1}{2\nu}}\cdot\lim_{\nu\to\infty}\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{1}{2\nu}\right)=$$

$$=1\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x$$

(ii) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sigma\upsilon\nu 2x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\eta\mu\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\eta\mu\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\eta\mu x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}{2\eta\mu\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ΘΕΜΑ 43

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x+\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-1\right)\left(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\varphi x+\frac{1}{\eta\mu x}-1\right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 x+2\,\varepsilon\varphi^2 x\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+2\,\sigma\varphi^2 x\right)$

Λύση

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\eta\mu x+\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-1\right)\left(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\varphi x+\frac{1}{\eta\mu x}-1\right)\right]=$

$$\lim_{x\to 0}\left[(\eta\mu x+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-1)(\sigma\upsilon\nu x+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\frac{1}{\eta\mu x}-1)\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+1-\eta\mu x)}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+1)^2-(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^{2x}+1+\eta\mu 2x-1+\eta\mu 2x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\frac{2\eta\mu 2x}{\frac{\eta\mu 2x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)+4=4$$

(ii) $\lim_{x\to 0}(\eta\mu^2 x+2\,\varepsilon\varphi^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x+2\,\sigma\varphi^2 x)=$

$$\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 x+\frac{2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\frac{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x(\sigma\upsilon\nu^2 x+2)\,\sigma\upsilon\nu^2 x(\eta\mu^2 x+2)}{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu^2 x+2)\cdot\lim_{x\to 0}(\eta\mu^2 x+2)=3\cdot 2=6$$

ΘΕΜΑ 44

Έστω α, $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής που πληροί τη συνθήκη $f(f(x))=\alpha f(x)+\beta x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(0)=0$.

Λύση

Έστω ότι $f(x)>x$ για κάθε $x\in R$ ή $f(x)<x$ για κάθε $x\in R$

(1) $f(x)>x$ για κάθε $x\in R$

Έστω ότι $f(x)=f(y) \Rightarrow f(f(x))=f(f(y)) \Rightarrow \alpha f(x)+\beta x=\alpha f(y)+\beta y$
$\Rightarrow \beta x=\beta y \Rightarrow x=y$. Άρα η f είναι "1-1". Συνεπώς είναι μονότονη στο R.

Από την *(1)* έχουμε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο R.

$f(x)>x \Rightarrow f(f(x))>f(x) \Rightarrow \alpha f(x)+\beta x>f(x)$

$\Rightarrow f(x) < \dfrac{\beta x}{1-\alpha}$ για κάθε $x\in R$

Άρα $f(1)<\dfrac{\beta}{1-\alpha}<1$ όταν $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ άτοπο διότι $f(x)>x$ για κάθε $x\in R$

(2) $f(x)<x$ για κάθε $x\in R$

$f(x)>f(f(x)) \Rightarrow f(x)>\alpha f(x)+\beta x \Rightarrow f(x)>\dfrac{\beta x}{1-\alpha}$

Για $x=-1$ είναι $f(-1)>-\dfrac{\beta}{1-\alpha}>-1$ άτοπο

Άρα υπάρχει $x_0\in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0$

$f(f(x_0))=\alpha f(x_0)+\beta(x_0) \Rightarrow x_0=\alpha x_0+\beta x_0$

$\Rightarrow x_0(\alpha+\beta-1)=0 \Rightarrow x_0=0$ διότι $\alpha+\beta<1$.

Άρα $f(0)=0$

ΘΕΜΑ 45

Έστω $\mathbf{f:[0,1]\to R}$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $\mathbf{f(0)>0}$ και $\mathbf{f(1)<0}$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\mathbf{g:[0,1]\to R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{f+g}$ να είναι αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=0}$.

Λύση

Έστω $A=\{x\in[0,1], f(x)\geq 0\}$, $x_0=\sup A$ και $h=f+g$

Επειδή η h είναι αύξουσα, έχουμε $h(x_0)\geq h(x)$ για κάθε $x\in A$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0,1], οπότε

$$h(x_0)\geq g(\sup A) = g(x_0) \quad \text{και} \quad g(1) = h(1)-f(1) > h(1)\geq h(x_0)\geq g(x_0)$$

Άρα υπάρχει $t\in[x_0,1]$ τέτοιο, ώστε $g(t)=h(x_0)$

Η h είναι αύξουσα οπότε $h(t)\geq h(x_0) = g(t)$

Άρα $f(t) = h(t)-g(t)\geq 0$ οπότε $t\in A$

Όμως $t\geq x_0 = \sup A$, οπότε $t=x_0$.

Άρα $h(x_0) = g(x_0)$ και $f(x_0) = h(x_0)-g(x_0) = 0$

ΘΕΜΑ 46

Έστω **g:R→R** μία πραγματική συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}\,g(x) \quad (1)$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η **g** είναι περιοδική.

Λύση

Για $x \to x+1$ έχουμε:

$g(x+2)+g(x)=\sqrt{2}g(x+1) \quad (1) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x+2)+g(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}g(x)-g(x-1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x+2)+g(x) = 2g(x)-\sqrt{2}g(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x+2)+\sqrt{2}g(x-1) = g(x)$

Για $x \to x+1$,

$g(x+3)+\sqrt{2}g(x) = g(x+1)$

Για $x \to x+1$, $g(x+4)+\sqrt{2}g(x+1) = g(x+2) \quad (2)$ επειδή

$\sqrt{2}g(x+1) = g(x+2)+g(x)$ η (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x+4)+g(x+2)+g(x) = g(x+2) \Rightarrow g(x) = -g(x+4) \quad (3)$

Για x → x-4 έχουμε:

$$g(x-4) = -g(x) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις *(3)* και *(4)* προκύπτει

$$g(x+4) = g(x-4)$$

και για x → x+4 έχουμε

$$g(x) = g(x+8)$$

Άρα η g περιοδική με T=8.

ΘΕΜΑ 47

Έστω $\mathbf{f:(0,\infty)\rightarrow R}$ μια συνάρτηση φθίνουσα με $\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}$ αύξουσα.

Αποδείξτε ότι η **f** είναι συνεχής.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\infty)$ στο οποίο η f δεν είναι συνεχής. Τότε

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) > \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad (1)$$

Επειδή η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα για κάθε $h \in (0,x_0)$ έχουμε

$$\frac{f(x_0+h)}{x_0+h} \geq \frac{f(x_0-h)}{x_0-h}$$

$$\frac{f(x_0+h)}{x_0+h} - \frac{f(x_0-h)}{x_0-h} = \frac{x_0}{x_0^2-h^2}\,[f(x_0+h)-f(x_0-h)] -$$

$$-\frac{h}{x_0^2-h^2}\,[f(x_0+h)+f(x_0-h)] > 0$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{x_0}{x_0^2-h^2}\,(f(x_0+h)-f(x_0-h)) - \frac{h}{x_0^2-h^2}\,(f(x_0+h)+f(x_0-h))\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0}\left(\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - \lim_{h\to 0} f(x_0-h)\right) =$$

$\frac{1}{x_0}[f(x_0^+) - f(x_0^-)] \geq 0$ άτοπο λόγω της *(1)*.

ΘΕΜΑ 48

Έστω $\alpha \in (0,1)$ και $\nu \in N^*$ δοσμένοι. Να εξεταστεί αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f: R \to R$ τέτοιες, ώστε $(\underbrace{fofofo...of}_{2\nu \text{ φορές}})(x) = \alpha^x - x^{2\nu+1}$ για κάθε $x \in R$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις f με την παραπάνω ιδιότητα

$h(x) = \underbrace{fofo..of}_{2\nu}$

$g(x) = \alpha^x - x^{2\nu+1}$, $g'(x) = \alpha^x \ln\alpha - (2\nu+1)x^{2\nu} < 0$, διότι $\ln\alpha < 0$

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η g είναι "1-1".

Αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι "1-1". Όμως η f είναι και συνεχής, οπότε είναι μονότονη.

Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα πράγμα άτοπο διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα και $h(x)=g(x)$, $x \in R$.

Άρα δεν υπάρχουν συναρτήσεις που να πληρούν τις δοσμένες σχέσεις.

ΘΕΜΑ 49

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 0}(x\,\sigma\varphi x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi x$

(iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi 2x+2\sigma\varphi x\,\sigma\varphi 2x)$

Λύση

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(x\,\sigma\varphi x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$

(ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi x=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\eta\mu x}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\frac{(-\eta\mu x)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x)=1\cdot(-1)=-1$$

(iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi 2x+2\sigma\varphi x\,\sigma\varphi 2x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x\,\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 2x}+\frac{2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu x\,\eta\mu 2x}\right)=$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\eta\mu x\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 2x}+\frac{2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 2x}{2\eta\mu x\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}+\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x}=-2-1=-3$$

ΘΕΜΑ 50

Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\sqrt{x^2+4x+2} - x - 2]$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

Λύση

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3} - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x} =$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} x[\sqrt{x^2+4x+2} - x - 2] =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \dfrac{(\sqrt{x^2+4x+2} - x - 2)(\sqrt{x^2+4x+2} + x + 2)}{\sqrt{x^2+4x+2} + x + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(x^2+4x+2-x^2-4x-4)}{\sqrt{x^2+4x+2} + x + 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+4x+2} + x + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}\right)} = -1$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

ΘΕΜΑ 51

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to\alpha} (x-\alpha)\,\sigma\varphi\dfrac{\pi x}{\alpha}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\sigma\varphi x}$

Λύση

(i) Θέτουμε x-α=t και έχουμε

$$\lim_{x\to\alpha} (x-\alpha)\,\sigma\varphi\frac{\pi x}{\alpha} = \lim_{t\to 0} t\,\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi t}{\alpha}\right) = \lim_{t\to 0} t\cdot\sigma\varphi\frac{\pi t}{\alpha} =$$

$$= \lim_{t\to 0} t\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{\alpha}}{\eta\mu\frac{\pi t}{\alpha}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\pi t}{\alpha}}{\eta\mu\frac{\pi t}{\alpha}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{\alpha}}{\frac{\pi}{\alpha}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{\alpha}}{\eta\mu\frac{\pi t}{\alpha}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{\alpha}}{\frac{\pi}{\alpha}} = 1\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\sigma\varphi x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot x\,\sigma\varphi x} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0} x\,\sigma\varphi x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{x}{\eta\mu x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}} = e^{1\cdot 1} = e$$

ΘΕΜΑ 52

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^8-x+1)}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{1/x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x+1}}{2x+3}$ (iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+\alpha x+1}{x^2+3x-2}\right)^x$

Λύση

(i) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^8-x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^8\left(1-\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^8+\ln\left(1-\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{8\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}\right)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

(ii) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{1/x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

$$(iii)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-2x+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$(iv)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-2+\alpha x-3x+3}{x^2+3x-2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x(\alpha-3)+3}{x^2+3x-2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x(\alpha-3)+3}{x^2+3x-2}\right)^{\frac{x^2+3x-2}{x(\alpha-3)+3}\cdot\frac{x(\alpha-3)+3}{x^2+3x-2}\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(\alpha-3)+3x}{x^2+3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(\alpha-3)+3/x}{x^2+3/x-2/x^2}}=e^{\alpha-3}$$

ΘΕΜΑ 53

Να βρεθούν τα όρια:

$$(i)\ \lim_{x\to0}(1+\eta\mu x)^{1/x}\qquad(ii)\ \lim_{x\to0}(1+\eta\mu x)^{1/\varepsilon\varphi x}$$

$$(iii)\ \lim_{x\to0}(1+\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x)^{1/x}\qquad(iv)\ \lim_{x\to0}(1+x^2)^{\sigma\varphi^2 x}$$

Λύση

$$(i)\ \lim_{x\to0}(1+\eta\mu x)^{1/x}=\lim_{x\to0}(1+\eta\mu x)^{1/\eta\mu x\cdot\eta\mu x\cdot 1/x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}=e^1=e$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\eta\mu x)^{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\eta\mu x)^{\frac{1}{\eta\mu x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x}=e$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x}{x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}}=e^{1\cdot 1\cdot 0}=e^{0}=1$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\sigma\varphi^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sigma\varphi^2 x}{1}\cdot x^2}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\varepsilon\varphi^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}}=e^{1\cdot 1}=e$

ΘΕΜΑ 54

Να βρεθεί το όριο: $\mathbf{L}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{2\nu}}\right)^{\varepsilon\varphi(\nu x)}$, όπου $\nu\in\mathbf{N}^*-\{1\}$.

Λύση

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\left[1+\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}-1\right)\right]^{\varepsilon\varphi(\nu x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\left(1+\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\right)^{\varepsilon\varphi(\nu x)}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \left(1+\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\right)^{\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\varepsilon\varphi(\nu x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\varepsilon\varphi(\nu x)}$$

Όμως

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}} \frac{\left(\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}\right)\varepsilon\varphi(\nu x)}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{2\nu}\right)}{1}\cdot\frac{\eta\mu(\nu x)}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}{1} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{2\nu}}{1}\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{2\nu}\right)}{\sigma\upsilon\nu(\nu x)} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{2\nu}}{1}\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{2\nu}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2\nu}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{2\nu}\right)}{x-\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-\nu x}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\nu x\right)}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{2\nu}}{\frac{\pi}{2}-\nu x} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2\nu}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{x-\frac{\pi}{2\nu}}{\frac{\pi}{2}-\nu x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\nu}}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2\nu}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2\nu}}\frac{2\nu x-\pi}{2\nu}\cdot\frac{2}{\pi-2\nu x} =$$

$$=\frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\nu}}\cdot\frac{-1}{\nu}=\frac{-2}{\nu\cdot 2\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\nu}}=\frac{-2}{\nu\,\eta\mu\frac{\pi}{\nu}}$$

Άρα $\quad L=e^{\frac{-2}{\nu\,\eta\mu\frac{\pi}{\nu}}}$

ΘΕΜΑ 55

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[\nu]{1+x}-1}{x}$, $\nu\in N$

Λύση

(i) Θέτουμε $\sqrt{x}=t$, οπότε όταν $x\to 4$ $\in$ $t\to 2$ και έχουμε

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2+t-6}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t+3)(t-2)}=\frac{12}{5}$$

(ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}{x-1}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot 2}+\sqrt[3]{4}}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt[3]{4}}{1}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

(iii) Θέτουμε $\sqrt[\nu]{1+x}-1=t$ $\in$ $1+x=(t+1)^{\nu}$ $\in$ $x=(t+1)^{\nu}-1$

Άρα όταν $x\to 0$ $\in$ $t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\nu]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+1)^{\nu}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^{\nu}+\binom{\nu}{1}t^{\nu-1}+\dots\binom{\nu}{\nu-1}t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t\,[t^{\nu-1}+\binom{\nu}{1}t^{\nu-2}+\dots+\binom{\nu}{\nu-1}]}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{\nu-1}+\binom{\nu}{1}t^{\nu-2}+\dots+\binom{\nu}{\nu-1}}=$$

$$=\frac{1}{\binom{\nu}{\nu-1}}=\frac{1}{\dfrac{\nu!}{(\nu-1)!}}=\frac{1}{\nu}$$

ΘΕΜΑ 56

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $$L_1=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[\nu]{2x+8}-\sqrt[\nu]{8x+2}}{\sqrt[\nu]{7x+3}-\sqrt[\nu]{6x+4}}\quad \nu\in N$$

(ii) $$L_2=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[\nu]{2x^2+3x+1}-\sqrt[\nu]{3x^2+x+2}}{\sqrt[\nu]{3x^2+2x+1}-\sqrt[\nu]{x^2+2x+3}}\quad \nu\in N^*$$

Λύση

(i) $$L_1=\lim_{x\to 1}\frac{2x+8-8x-2}{7x+3-6x-4}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[\nu]{(7x+3)^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{(7x+3)^{\nu-2}(6x+4)}+\dots+\sqrt[\nu]{(6x+4)^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{(2x+8)^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{(2x+8)^{\nu-2}(8x+2)}+\dots+\sqrt[\nu]{(8x+2)^{\nu-1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{6-6x}{x-1}\right)\cdot\frac{10^{\frac{\nu-1}{\nu}}\cdot\nu}{10^{\frac{\nu-1}{\nu}}\cdot\nu}=\lim_{x\to 1}\frac{-6\,(x-1)}{x-1}=-6$$

Άρα $L_1=-6$

(ii) $L_2=\lim_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+3x+1)-(3x^2+x+2)}{(3x^2+2x+1)-(x^2+2x+3)}\cdot$

$\cdot\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[\nu]{(3x^2+2x+1)^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{(3x^2+2x+1)^{\nu-1}(x^2+2x+3)}+\ldots+\sqrt[\nu]{(x^2+2x+3)^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{(2x^2+3x+1)^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{(2x^2+3x+1)^{\nu-1}(3x^2+x+2)}+\ldots+\sqrt[\nu]{(3x^2+2x+2)^{\nu-1}}}=$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x+1-3x^2-x-2}{3x^2+2x+1-x^2-2x-3}\cdot\dfrac{\nu\cdot 6^{\frac{\nu-1}{\nu}}}{\nu\cdot 6^{\frac{\nu-1}{\nu}}}=\lim_{x\to 1}\dfrac{-x^2+2x-1}{2x^2-2}=$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}=-\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

ΘΕΜΑ 57

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\mathbf{L_1=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\nu\eta\mu\,(2\nu+1)x}{\eta\mu x}-\dfrac{\eta\mu^2\nu x}{\eta\mu^2 x}\right],\ \nu\in R}$

(ii) $\mathbf{L_2=\lim_{x\to 2}\dfrac{\varepsilon\varphi\,(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x})}{\eta\mu(x^2-6x+8)}}$

Λύση

(i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\nu\eta\mu\,(2\nu+1)x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\,(2\nu+1)x}{(2\nu+1)x}\cdot\dfrac{x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\nu(2\nu+1)}{1}=$

$=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\nu(2\nu+1)=\nu(2\nu+1)$

Επίσης $\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2\nu x}{\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(\nu x)}{(\nu x)^2}\cdot\dfrac{x^2}{\eta\mu^2 x}\cdot\nu^2=\nu^2$

Άρα $L_1=\lim_{x\to 0}\dfrac{\nu\eta\mu\,(2\nu+1)x}{\eta\mu x}-\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2\nu x}{\eta\mu^2 x}=\nu(2\nu+1)-\nu^2=2\nu^2+\nu-\nu^2$

$L_1=\nu(\nu+1)$

(ii) Έχουμε $L_2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{εφ(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{x^2-6x+8}{ημ(x^2-6x+8)}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-6x+8}$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-2x}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(x^2-6x+8)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(x-4)(x-2))}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Άρα $L_2=\dfrac{1}{8}$

ΘΕΜΑ 58

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{συν2x-συν3x}{1-συνx}$

(ii) $\lim\limits_{x\to π}\dfrac{ημ(mx)}{ημ(νx)}$ $m,ν\in Z$ (iii) $\lim\limits_{x\to π}\dfrac{(ημ8x+ημ10x)^2}{1+συνx}$

Λύση

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{συν2x-συν3x}{1-συνx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ημ\frac{5x}{2}ημ\frac{x}{2}}{2ημ^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ\frac{5x}{2}}{ημ\frac{x}{2}}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{ημ\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{5x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{2}\cdot\frac{2}{x}\right)=5$$

(ii) Θέτουμε $x=π+t$, οπότε όταν $x\to π \Rightarrow t\to 0$ και έχουμε

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu(mx)}{\eta\mu(\nu x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu(m\pi+mt)}{\eta\mu(\nu\pi+\nu t)}=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^m\,\eta\mu\, mt}{(-1)^\nu\,\eta\mu\,\nu t}=$$

$$(-1)^{m-\nu}\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu(mt)}{mt}\cdot\frac{\nu t}{\eta\mu(\nu t)}\cdot\frac{m}{\nu}=(-1)^{m-\nu}\cdot\frac{m}{\nu}$$

(iii) Θέτουμε $x-\pi=y$, οπότε όταν $x\to\pi \Rightarrow y\to 0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to\pi}\frac{(\eta\mu 8x+\eta\mu 10x)^2}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{y\to 0}\frac{[\eta\mu(8\pi+8y)+\eta\mu(10\pi+10y)]^2}{1+\sigma\upsilon\nu(\pi+y)}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{(\eta\mu 8y+\eta\mu 10y)^2}{1-\sigma\upsilon\nu y}=\lim_{y\to 0}\frac{4\eta\mu^2 9y\,\sigma\upsilon\nu^2 y}{2\eta\mu^2\frac{y}{2}}=$$

$$2\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu^2 9y}{(9y)^2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{\eta\mu^2\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{81y^2}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=2\lim_{y\to 0}\frac{81y^2}{\frac{y^2}{4}}=2\cdot 81\cdot 4=648$$

ΘΕΜΑ 59

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\,\eta\mu 2x\ldots\eta\mu\nu x}{\eta\mu(\nu+1)x\,\eta\mu(\nu+2)x\ldots\eta\mu 2\nu x},\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

(ii) $$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu 4x)(1-\sigma\upsilon\nu 5x)(1-\sigma\upsilon\nu 7x)(1-\sigma\upsilon\nu 8x)}{x^8}$$

(iii) $$L_3=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x+1}$$

Λύση

(i) $$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdots\frac{\eta\mu \nu x}{\nu x}\cdot\frac{(\nu+1)x}{\eta\mu(\nu+1)x}\cdots\frac{2\nu x}{\eta\mu(2\nu x)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2\ldots\nu}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots 2\nu}=\frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}$$

(ii) $$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu^2 2x\cdot 2\eta\mu^2\frac{5x}{2}\cdot 2\eta\mu^2\frac{7x}{2}\cdot 2\eta\mu^2 4x}{x^8}=$$

$$=2^4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 2x}{(2x)^2}\cdot\frac{\eta\mu^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\eta\mu^2\frac{7x}{2}}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\eta\mu^2 4x}{(4x)^2}\cdot\frac{4x^2\cdot\frac{25x^2}{4}\cdot\frac{49x^2}{4}\cdot 16x^2}{x^8}=$$

$$=2^4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 25\cdot 49\cdot 16x^8}{x^8}=2^4\cdot 4\cdot 25\cdot 49\cdot 16=2^4(2\cdot 5\cdot 7\cdot 4)^2=2^4\cdot 280^2$$

(iii) $$L_3=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim_{x\to\pi}\frac{4\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}2\eta\mu^2\frac{x}{2}=2\eta\mu^2\frac{\pi}{2}=2$$

Άρα $L_3=2$

ΘΕΜΑ 60

Να βρεθούν τα όρια: (i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 5x\,\eta\mu 8x}$$

(ii) $$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\varphi(x+h)-\varepsilon\varphi(x-h)}{h}\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z$$

$$\text{(iii)} \lim_{x \to \pi} \frac{\eta\mu\frac{x}{2} - 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}$$

Λύση

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 5x \eta\mu 8x} = \lim_{x \to 0} \frac{+2\eta\mu\frac{5x}{2}\eta\mu\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{5x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{2}\eta\mu 8x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\eta\mu 8x} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{8x}{\eta\mu 8x} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{8x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{8x} = \frac{1}{16}$$

$$\text{(ii)} \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon\varphi(x+h) - \varepsilon\varphi(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon\varphi(x+h-x+h)[1+\varepsilon\varphi(x+h)\,\varepsilon\varphi(x-h)]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon\varphi 2h[1+\varepsilon\varphi(x+h)\varepsilon\varphi(x-h)]}{h} = (1+\varepsilon\varphi^2 x)\lim_{h \to 0}\left(\frac{\varepsilon\varphi 2h}{2h} \cdot 2\right) =$$

$$2(1+\varepsilon\varphi^2 x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x \to \pi} \frac{\eta\mu\frac{x}{2} - 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1} = \lim_{x \to \pi} \frac{\eta\mu\frac{x}{2} - 1}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = -\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \eta\mu\frac{x}{2}}{2\left(1 - \eta\mu^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \eta\mu\frac{x}{2}}{\left(1 - \eta\mu\frac{x}{2}\right)\left(1 + \eta\mu\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x \to \pi} \frac{1}{1 + \eta\mu\frac{x}{2}} = -\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 61

Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $$L_1 = \lim_{x \to \pi} \frac{\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 2x - 1}{\sigma\upsilon\nu 4x + \eta\mu 2x - 1}$$

(ii) $$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x + \eta\mu^4 x}{x(1 - \sigma\upsilon\nu x) + \varepsilon\varphi^4 x}$$

(iii) $$L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu mx - \sigma\upsilon\nu mx}, \quad m \in R - \{0\}$$

Λύση

(i) $$L_1 = \lim_{x \to \pi} \frac{3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x + 1 - 2\eta\mu^2 x - 1}{-2\eta\mu^2 2x + \eta\mu 2x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x}{-8\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \to \pi} \frac{\eta\mu x(3 - 4\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x)}{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu x - 8\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{3 - 4\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x - 8\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{3}{2}$$

(ii) $$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1 + \eta\mu^3 x \right)}{x(1 - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{\eta\mu^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^4}{\sigma\upsilon\nu^4 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}(1 - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^3 x\, \sigma\upsilon\nu x)}{x(1 - \sigma\upsilon\nu x + x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^3 x\, \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x + x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\eta\mu^2 \frac{x}{2} + \eta\mu^3 x\, \sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu^2 \frac{x}{2} + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} + \frac{\eta\mu^3 x\, \sigma\upsilon\nu x}{\frac{x^2}{4}}}{2\frac{\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} + \frac{x^3}{\frac{x^2}{4}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1}\cdot\dfrac{4}{x^2}}=\frac{2+1\cdot 0}{2+0}=\frac{2}{2}=1 \text{ Άρα } L_2=1$$

(iii) $$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+2\eta\mu^2\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{mx}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{mx}{2}+2\eta\mu^2\frac{mx}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\eta\mu\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}}{\left(\dfrac{\eta\mu\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{mx}{2}+\dfrac{\eta\mu\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\cdot\eta\mu\frac{mx}{2}\right)\cdot\frac{mx}{2}}=\frac{1}{m}$$

ΘΕΜΑ 62

Να βρεθεί το όριο: $$L_1=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sigma\varphi x-\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 3x+4\eta\mu^2 x-1}$$

Λύση

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu 3x+4\eta\mu^2 x-1 = 4\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu^2 x-1 =$
$= 4\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x+4-4\sigma\upsilon\nu^2 x-1 = 4\sigma\upsilon\nu^3 x-4\sigma\upsilon\nu^2 x+3-3\sigma\upsilon\nu x =$
$= 4\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x-1)-3(\sigma\upsilon\nu x-1) = (\sigma\upsilon\nu x-1)(4\sigma\upsilon\nu^2 x-3) =$
$(\sigma\upsilon\nu x-1)(4-4\eta\mu^2 x-3) = (1-4\eta\mu^2 x)(\sigma\upsilon\nu x-1) =$
$(1-2\eta\mu x)(1+2\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-1)$

$$L_1=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\eta\mu\frac{\pi}{6}}}{(1-2\eta\mu x)(1+2\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\eta\mu x\,\eta\mu\frac{\pi}{6}}}{(1-2\eta\mu x)(1+2\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\eta\mu x\,\eta\mu\frac{\pi}{6}(\sigma\upsilon\nu x-1)(1+2\eta\mu x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{2\left(\frac{1}{2}-\eta\mu x\right)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(1+2\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}-2}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\eta\mu\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}}{4\eta\mu\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{12}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3-2\sqrt{3}}\quad \text{Άρα}\quad L_1=\frac{4}{3-2\sqrt{3}}$$

ΘΕΜΑ 63

Να υπολογιστεί το όριο: $L_1 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x - 2}{(1-\sqrt{2}\,\eta\mu x)(1-\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x)}$

Λύση

Είναι $(\varepsilon\varphi x-1)(\sigma\varphi x-1) = \varepsilon\varphi x\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x+1 =$
$= 2-\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x = -(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x-2)$

Συνεπώς $L_1 = -\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\varepsilon\varphi x-1}{1-\sqrt{2}\,\eta\mu x} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sigma\varphi x-1}{1-\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x}$

Όμως $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\varepsilon\varphi x-1}{1-\sqrt{2}\eta\mu x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-1}{1-\sqrt{2}\eta\mu x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x(1-\sqrt{2}\eta\mu x)} =$

$$\sqrt{2}\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{2}\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}-\eta\mu x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\eta\mu\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}}{2\eta\mu\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} = -2$$

Επίσης $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sigma\varphi x-1}{1-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-1}{\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu x\right)} =$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\eta\mu x\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\eta\mu\dfrac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\,\eta\mu\dfrac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}}{-2\eta\mu\dfrac{\frac{\pi}{4}+x}{2}\,\eta\mu\dfrac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}=-2$$

Συνεπώς $L_1=-(-2)\cdot(-2)=-4$

ΘΕΜΑ 64

Να βρεθούν τα όρια: (i) $\mathbf{L_1=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\varepsilon\varphi x}{1-\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x}}$

(ii) $\mathbf{L_2=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\varepsilon\varphi^3 x-3\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}}$

Λύση

(i) Θέτουμε $x-\frac{\pi}{4}=y$, οπότε όταν $x\to\frac{\pi}{4}$, $y\to 0$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\varepsilon\varphi x}{1-\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\varepsilon\varphi\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}=$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\dfrac{\varepsilon\varphi y+1}{1-\varepsilon\varphi y}}{1-\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{1-\varepsilon\varphi y-\varepsilon\varphi y-1}{1-\varepsilon\varphi y}}{1-\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{-2\varepsilon\varphi y}{(1-\varepsilon\varphi y)(1-\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y)}=-2\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{1-\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y}=$$

$$-2\lim_{y\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}{2\eta\mu^2\frac{y}{2}+2\eta\mu\frac{y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}=-2\lim_{y\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}{\eta\mu\frac{y}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}=-2$$

(ιι) $$L_2=\frac{\varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi^2x-3}{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi^2x-\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\right)\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=24\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$-24\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=-24$$

Αρα $L_2 = -24$

ΘΕΜΑ 65

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha + x)\,\varepsilon\varphi(\alpha - x) - \varepsilon\varphi^2\alpha}{x^2}$, $\alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $L_2 = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{\varepsilon\varphi(A + B)\,\varepsilon\varphi(A + x) - \varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi C}{\varepsilon\varphi(A + B + x)}$

όπου $A+B+C=\Pi$ και $\sigma\upsilon\nu B \neq 0$.

Λύση

(i) $$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2 x}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\,\varepsilon\varphi^2 x} - \varepsilon\varphi^2\alpha\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^4\alpha\,\varepsilon\varphi^2 x}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\,\varepsilon\varphi^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi^2 x\,(\varepsilon\varphi^4\alpha - 1)}{x^2(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \varepsilon\varphi^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{x^2} \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi^4\alpha - 1}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\,\varepsilon\varphi^2 x} = \varepsilon\varphi^4\alpha - 1$$

(ii) Έχουμε $A+B=\Pi-C$, οπότε $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi C$. Άρα

$$L_2 = \lim_{x \to c} \frac{(-\varepsilon\varphi C)\,\varepsilon\varphi(A + x) - \varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi C}{\varepsilon\varphi(A + B + x)} = \lim_{x \to c} \frac{(-\varepsilon\varphi C)\,[\varepsilon\varphi(A + x) + \varepsilon\varphi B]}{\varepsilon\varphi(A + B + x)} =$$

$$= (-\varepsilon\varphi C) \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{\eta\mu(A + x)}{\sigma\upsilon\nu(A + x)} + \dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}}{\dfrac{\eta\mu(A + B + x)}{\sigma\upsilon\nu(A + B + x)}} = (-\varepsilon\varphi C) \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{\eta\mu(A + B + x)}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu(A + x)}}{\dfrac{\eta\mu(A + B + x)}{\sigma\upsilon\nu(A + B + x)}} =$$

$$= (-\varepsilon\varphi C) \lim_{x \to c} \frac{\sigma\upsilon\nu(A + B + x)}{\sigma\upsilon\nu(A + x)\,\sigma\upsilon\nu B} = (-\varepsilon\varphi C)\,\frac{\sigma\upsilon\nu\Pi}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu(A + C)} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi C}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu(\Pi - B)} = \frac{\varepsilon\varphi C}{-\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu B} = -\frac{\varepsilon\varphi C}{\sigma\upsilon\nu^2 B}$$

Άρα $L_2 = -\dfrac{\varepsilon\varphi C}{\sigma\upsilon\nu^2 B}$

ΘΕΜΑ 66

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + x) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2x)}{x^2}$$

(ii) $$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu\chi}$$

Λύση

(i) $$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\alpha + x) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2x) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + x)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\eta\mu\dfrac{2\alpha + x}{2}\eta\mu\dfrac{x}{2} - 2\eta\mu\dfrac{2\alpha + 3x}{2}\eta\mu\dfrac{x}{2}}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\eta\mu\dfrac{x}{2}\left[\eta\mu\left(\alpha + \dfrac{x}{2}\right) - \eta\mu\left(\alpha + \dfrac{3x}{2}\right)\right]}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\eta\mu\dfrac{x}{2}\eta\mu\left(-\dfrac{2x}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\alpha + \dfrac{4x}{2}}{2}}{x^2} = -4\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\dfrac{x}{2}\eta\mu\dfrac{x}{2}\sigma\upsilon\nu(\alpha + x)}{x^2}$$

$$L_1 = -4\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha + x)\cdot\frac{1}{4} = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

(ii) $$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+x^3}{(1+\sqrt{1-x^3})(\varepsilon\varphi x - \eta\mu x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}\cdot 2 = 1 \quad \text{Άρα} \quad L_2 = 1$$

ΘΕΜΑ 67

Να βρεθούν τα όρια: (i) $$\mathbf{L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 - x\eta\mu x} - \sigma\upsilon\nu 2x}{\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}}$$

(ii) $$\mathbf{L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + x\eta\mu x} - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$$

Λύση

(i) $$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1 - x\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 2x}{(\sqrt{1 - x\eta\mu x} + \sigma\upsilon\nu 2x)\,\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 2x - x\,\eta\mu x}{\frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}(\sigma\upsilon\nu 2x + \sqrt{1 - x\,\eta\mu x})}$$

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu 2x+\sqrt{1+x\,\eta\mu x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 2x-x\,\eta\mu x}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 2x}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}-\lim_{x\to 0}\frac{x\,\eta\mu x}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu^2 2x}{4x^2}\cdot 4x^2}{\frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x^2}{4}}-\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot x}{\frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x^2}{4}}\right]=\frac{1}{2}(16-4)=\frac{12}{2}=6$$

Άρα $L_1 = 6$

(ii) $$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\,\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(\sqrt{1+x\,\eta\mu x}+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+x\,\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\,\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{x\,\eta\mu x}{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{x^2}{\frac{x^2}{4}}\right)+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\,\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{\frac{x^2}{4}}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4\right)=\frac{1}{2}(2+2)=2$$ Άρα $L_2 = 2$

ΘΕΜΑ 68

Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{px}-1}{x}$, $p\in N^*$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^3-1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{x-2}$ (iv) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu\frac{x}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}}$

Λύση

(i) Θέτουμε $e^{px}-1=t$, οπότε όταν $x\to 0$, $t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{px}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{p}}=\lim_{t\to 0}\frac{p}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{p}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(t+1)^{1/t}}=$$

$$=\frac{p}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}}=\frac{p}{\ln e}=p$$

(ii) $$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-2^2}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=4\ln 2-4$$

(iii) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{3}\ln\lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{3}\ln e=\frac{1}{3}$$

(iv) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu\frac{x}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu\frac{x}{4}-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{2\eta\mu\left(\frac{2x}{8}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\pi}{\eta\mu\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu\frac{x+\pi}{2}\cdot\eta\mu\frac{x-\pi}{2}}{\eta\mu\frac{x-\pi}{4}} = -\sqrt{2}\lim_{x\to\pi}\frac{2\eta\mu\frac{x+\pi}{2}\eta\mu\frac{x-\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{x-\pi}{4}}{\eta\mu\frac{x-\pi}{4}} =$$

$$= -2\sqrt{2}\lim_{x\to\pi}\left(\eta\mu\frac{x+\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-\pi}{4}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ 69

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x})$

Λύση

(i) Έχουμε $0 < x\left|\sqrt{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}\right| \le |x|$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}} = 0$

(ii) Έχουμε

$$\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x} = 2\eta\mu\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} =$$

$$= 2\eta\mu\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\sigma\upsilon\nu\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

Άρα $|\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x} \le 2\left|\eta\mu\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|$

Όμως $\lim\limits_{x\to\infty}\eta\mu\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$

οπότε $\lim\limits_{x\to\infty}(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}) = 0$

ΘΕΜΑ 70

Να βρεθούν τα όρια: (i) $L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$

(ii) $L_2 = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\eta\mu\alpha}}{\eta\mu\sqrt{x} - \eta\mu\sqrt{\alpha}}$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Λύση

(i) $L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} - (1 - \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x})}{\eta\mu^2 x}$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x} - \frac{1 - \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x\,(1 + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x})} - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x\,(\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} + 1)} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\eta\mu x} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\eta\mu x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$ Άρα $\boxed{L_1 = \frac{1}{12}}$

(ii) $L_2 = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\eta\mu x - \eta\mu\alpha}{(\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\eta\mu\alpha})\,(\eta\mu\sqrt{x} - \eta\mu\sqrt{\alpha})} =$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{2\eta\mu\frac{x - \alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x + \alpha}{2}}{(\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\eta\mu\alpha})\,(\eta\mu\sqrt{x} - \eta\mu\sqrt{\alpha})}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x+\alpha}{2}}{(\sqrt{\eta\mu x}+\sqrt{\eta\mu\alpha})\,\sigma\upsilon\nu\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{x}}{2}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{\eta\mu\frac{x-\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{2}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sqrt{\eta\mu\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\eta\mu\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\cdot\frac{x-\alpha}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{2}}{\eta\mu\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{2}}\right)=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sqrt{\eta\mu\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sqrt{\eta\mu\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sqrt{\eta\mu\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}\cdot 2\sqrt{\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\eta\mu\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}$$

ΘΕΜΑ 71

Να βρεθούν τα όρια: (i) $L_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\eta\mu(2x+1)}-\sqrt{\eta\mu(x+2)}}{\varepsilon\varphi(x^2-1)}$

(ii) $L_2=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-1}$

Λύση

(i) $L_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(2x+1)-\eta\mu(x+2)}{(\sqrt{\eta\mu(2x+1)}+\sqrt{\eta\mu(x+2)})\,\varepsilon\varphi(x^2-1)}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\eta\mu\frac{x-1}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}(x+1)\,\sigma\upsilon\nu(x^2-1)}{(\sqrt{\eta\mu(2x+1)}+\sqrt{\eta\mu(x+2)})\,\eta\mu(x^2-1)}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu 3}{\sqrt{\eta\mu 3}}\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\frac{x-1}{2}}{\eta\mu(x^2-1)}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu 3}{\sqrt{\eta\mu 3}}\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\frac{x-1}{2}}{\frac{x-1}{2}}\cdot\frac{x^2-1}{\eta\mu(x^2-1)}\cdot\frac{\frac{x-1}{2}}{x^2-1}=\frac{\sigma\upsilon\nu 3}{\sqrt{\eta\mu 3}}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu 3}{\sqrt{\eta\mu 3}}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x-1)(x+1)}=\frac{\sigma\upsilon\nu 3}{4\sqrt{\eta\mu 3}}$$

(ii) $$L_2=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-(1-\sigma\upsilon\nu 2x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{3\eta\mu x-4\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-2\eta\mu^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu x(3-4\eta\mu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-8\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}(3-4\eta\mu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\left(1-8\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu\frac{x}{2}(3-4\eta\mu^2 x)}{1-8\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=2\cdot\frac{1(3-4\cdot 0)}{1-8\cdot 1\cdot 0}=2\cdot 3=6$$ Άρα $L_2=6$

ΘΕΜΑ 72

Να βρεθεί το όριο: $$L=\lim_{x\to 1}\frac{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_2 x+\beta_2}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_2 x+\alpha_2}}$$

όπου $\alpha_2\neq\beta_2$ και $\alpha_1+\beta_1>0$, $\alpha_2+\beta_2>0$

Λύση

Να υπολογίσουμε πρώτα το όριο:

$$L_1 = \lim_{x\to 1}\frac{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\eta\mu\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}}{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}}-\dfrac{\eta\mu\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}\right)}{(x-1)\left(\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}\;\sigma\upsilon\nu\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}\;\sigma\upsilon\nu\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}\right)}{\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}{x-1} =$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}\lim_{x\to 1}\frac{\alpha_1 x+\beta_1-\beta_1 x-\alpha_1}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}+\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}\;\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}\lim_{x\to 1}\frac{(\alpha_1+\beta_1)(x-1)}{x-1} = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}\;\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}$$

Εργαζόμενοι όπως πριν βρίσκουμε ότι:

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_2 x+\beta_2}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_2 x+\alpha_2}} = \frac{2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}\;\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\alpha_2+\beta_2}$$

Συνεπώς $L = L_1\cdot L_2 = \dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}\;\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}\cdot\dfrac{2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}\;\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\alpha_2+\beta_2}$

Άρα $L = \dfrac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_2+\beta_2}\cdot\dfrac{\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}$

ΘΕΜΑ 73

i) Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu\in N$ και $\alpha\in N$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = (-1)^{\nu}\sigma\upsilon\nu(\alpha-\nu\pi)$$

ii) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e}\right)$

Λύση

(i) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\nu\pi) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)+\eta\mu\alpha\,\eta\mu(\nu\pi) =$

$= \sigma\upsilon\nu\alpha(-1)^\nu+\eta\mu\alpha\cdot 0 = (-1)^\nu\,\sigma\upsilon\nu\alpha$

Άρα $(-1)^\nu\sigma\upsilon\nu(\alpha-\nu\pi) = (-1)^\nu\,(-1)^\nu\,\sigma\upsilon\nu\alpha = (-1)^{2\nu}\,\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha$

(ii) Άρα $\sigma\upsilon\nu(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e} = (-1)^\nu\,\sigma\upsilon\nu(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e}-\nu\pi) = (-1)^\nu\sigma\upsilon\nu\,\pi\nu(\sqrt[2\nu]{e}-1)$

Άρα $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma\upsilon\nu(\pi\nu\sqrt[2\nu]{e}) = \lim\limits_{\nu\to\infty}(-1)^\nu\sigma\upsilon\nu\,\pi\nu(\sqrt[2\nu]{e}-1) =$

$$=\lim_{\nu\to\infty}(-1)^\nu\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}\right)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

οπότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}=1$

$$\left|(-1)^\nu\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}\right)\right| \le \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}\right)\right|$$

Όμως $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}\right)=0$

οπότε έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty}(-1)^\nu\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{1/2\nu}-1}{\frac{1}{2\nu}}\right)=0$$

ΘΕΜΑ 74

Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\varepsilon\varphi x-x}{x^2}$

Λύση

Όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ημx<x<εφx, οπότε για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$\frac{\varepsilon\varphi x - x}{x^2} > 0$$

Όμως $\frac{\varepsilon\varphi x - x}{x^2} = \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - x}{x^2} = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x} < \frac{x - x\,\sigma\upsilon\nu x}{x^2 \sigma\upsilon\nu x} =$

$$\frac{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2\,\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}{x\,\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \eta\mu\frac{x}{2}$$

Συνεπώς $0 < \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x^2} < \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \eta\mu\frac{x}{2}$ οπότε

$$0 \le \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x^2} \le \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \eta\mu\frac{x}{2} \right)$$

Όμως $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \eta\mu\frac{x}{2} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu x} = 0$

Άρα $L_1 = 0$

ΘΕΜΑ 75

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:R \to [0,\infty)}$ τέτοια, ώστε $\mathbf{f(0)=1}$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-f(\nu x)}{x^2} = \alpha_\nu$. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)\sqrt{f(2x)}\ \sqrt[3]{f(3x)} \ldots \sqrt[\nu]{f(\nu x)}}{x^2}$$

αν ξέρουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει και είναι πεπερασμένο για κάθε $\nu \in N^*$.

Λύση

Έστω $E_\nu = \lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)\sqrt{f(2x)} \ldots \sqrt[\nu]{f(\nu x)}}{x^2}$

Έχουμε $E_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = \alpha_1$

$$E_\nu = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - f(x)\sqrt{f(2x)} \ldots \sqrt[\nu-1]{f[(\nu-1)x]}}{x^2} \sqrt[\nu]{f(\nu x)} + \frac{1 - \sqrt[\nu]{f(\nu x)}}{x^2} \right]$$

Άρα $E_\nu = E_{\nu-1} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[\nu]{f(\nu x)}}{x^2}$ (για κάθε $\nu \geq 2$)

Όμως $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[\nu]{f(\nu x)}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - f(\nu x)}{x^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt[\nu]{f(\nu x)})^{\nu-1} + \ldots + 1} = \frac{\alpha_\nu}{\nu}$

Συνεπώς για κάθε $\nu \geq 2$ είναι $E_\nu = E_{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\nu}$ *(1)*

Αν στην *(1)* θέσουμε $\nu = 2, 3, 4, \ldots, \nu$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 + \frac{\alpha_2}{2} \\ E_3 &= E_2 + \frac{\alpha_3}{3} \qquad (2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_\nu &= E_{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\nu} \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις *(2)* βρίσκουμε

$$E_\nu = E_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{3} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\nu} = \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\alpha_k}{k}$$

Άρα $\quad E_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\alpha_k}{k}$

ΘΕΜΑ 76

Να βρεθεί **α** τέτοιος, ώστε η συνάρτηση **f** με

$$f(x) = \begin{cases} (1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{\sqrt{2-x}}}, & \text{αν } x \in [-1,1) \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [-1,1).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο σημείο x=1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left[(1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\right]^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}} =$$

$$e^{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1+x}} = e^{\sqrt{2}}$$

Όμως f(1) = α. Άρα η f είναι συνεχής στο 1 όταν $\alpha = e^{\sqrt{2}}$

ΘΕΜΑ 77

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση **f** με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Λύση

Η f γράφεται $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x}, & \text{αν } x<0\end{cases}$

Δηλαδή $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \text{αν } x<0\end{cases}$

Η f ορίζεται στο R-{-1,1}. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια σ' αυτά τα σημεία (δηλαδή στα -1, 1).

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,\infty)$ και στο $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

Εξετάζουμε τώρα τη συνέχεια στο σημείο x=0.

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x+1}=-1$$

$f(0) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$

οπότε η f δεν είναι συνεχής στο x=0.

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο R-{-1,0,1}.

ΘΕΜΑ 78

Έστω **f,g:R→R** δύο περιοδικές συναρτήσεις που πληρούν τη σχέση $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Αποδείξτε ότι:

(i) **f** και **g** έχουν ίσες περιόδους.

(ii) **f=g** .

Λύση

(i) Έστω t_1 η περίοδος της f και t_2 η περίοδος της g.

Αν $x_0 \in R$ και $k \in Z$, είναι

$$0 \leq |g(x_0+t_1)-g(x_0)| = |g(x_0+kt_2+t_1)-g(x_0+kt_2)| =$$
$$=|g(x_0+kt_2+t_1)-f(x_0+kt_2+t_1)+f(x_0+kt_2+t_1)-g(x_0+kt_2)| \leq$$
$$\leq |g(x_0+kt_2+t_1)-f(x_0+kt_2+t_1)|+|f(x_0+kt_2+t_1)-g(x_0+kt_2)|$$

Όμως $\lim\limits_{k \to \infty} (g(x_0+kt_2+t_1)-f(x_0+kt_2+t_1)) = 0$

και $\lim\limits_{k \to \infty} (f(x_0+kt_2)-g(x_0+kt_2)) = 0$

Άρα $\lim\limits_{k \to \infty} [g(x_0+t_1)-g(x_0)] = 0 \Leftrightarrow g(x_0+t_1) = g(x_0)$

Άρα t_1 είναι περίοδος της g. Όμοια αποδεικνύουμε ότι t_2 είναι περίοδος της f.

(ii) Έστω $x_0 \in R$ και T η κοινή περίοδος των f και g.

Είναι $f(x_0)-g(x_0) = f(x_0+kT)-g(x_0+kT)$

$$\lim_{k\to\infty} [f(x_0+kT)-g(x_0+kT)] = 0$$

οπότε

$$\lim_{k\to\infty} [f(x_0)-g(x_0)] = 0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0) \text{ για κάθε } x_0\in R.$$

ΘΕΜΑ 79

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις **f, g, h** έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού **A⊆R** και ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)+0{,}75\leq f(x)+g(x)+h(x)$$

για κάθε **x∈ A**, να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=g(x)=h(x) \text{ για κάθε } x\in A.$$

Λύση

Είναι

$$f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)+\frac{3}{4}-f(x)-g(x)-h(x)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(g(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(h(x)-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(g(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(h(x)-\frac{1}{2}\right)^2= 0$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) = h(x) = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x\in A.$$

ΘΕΜΑ 80

Έστω **f: [0,1] →R** μια συνάρτηση αύξουσα τέτοια, ώστε για κάθε

x_1, x_2, x_3 με $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in (0,1)$.

(ii) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ έχει όλες τις προηγούμενες ιδιότητες, όμως δεν είναι συνεχής στο 1.

Λύση

(i) Έστω $x_0 \in [0,1]$.

Για $0 \leq x < x_0 < x_3$

έχουμε $f(0) < f(x) < f(x_0) < f(x_3)$ και

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \Leftrightarrow 0 \leq f(x_0) - f(x) \leq (x_0 - x)\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$$

διότι η f είναι αύξουσα και $x_0 - x > 0$.

Συνεπώς

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Έστω $0 \leq x_0 < x < x_3 < 1$. Είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} \leq \frac{f(1) - f(x_3)}{1 - x_3}$$

και επειδή $f(x) - f(x_0) \geq 0$ και $x - x_0 > 0$ είναι

$$0 \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)\frac{f(1) - f(x_3)}{1 - x_3}$$

Άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Άρα

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ και η f είναι συνεχής.

(ii) Η f δεν είναι συνεχής στο x=1 διότι

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ και $\lim_{x \to 1^+} f(1) = 1$

και πληρεί τις επάνω συνθήκες.

ΘΕΜΑ 81

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ συνεχής και φραγμένη. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(\xi) = \xi}$.

Λύση

Επειδή η f είναι φραγμένη υπάρχει M>0 τέτοιο, ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in R$.

Έστω $g(x) = f(x)-x$, $x \in R$. Έχουμε

$g(-M) = f(-M)+M \geq 0$

$g(M) = f(M)-M \leq 0$

$g(M)g(-M) \leq 0$, οπότε βάσει του θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in [-M,M]$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

ΘΕΜΑ 82

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$ και $\alpha\beta > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $x_0 f(x_0) = \alpha\beta$.

Λύση

Έστω $g:\alpha,\beta \to R$ με $g(x) = xf(x)-\alpha\beta$

Έχουμε $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

$g(\alpha) = \alpha f(\alpha)-\alpha\beta = \alpha[f(\alpha)-\beta]$

$g(\beta) = \beta f(\beta)-\alpha\beta = \beta[f(\beta)-\alpha]$

$$g(\alpha)g(\beta) = \underset{>0}{\alpha\beta}\,\underset{\leq 0}{[f(\alpha)-\beta]}\,\underset{\geq 0}{[f(\beta)-\alpha]} \leq 0$$

Αν $g(\alpha)=0$ τότε $\alpha f(\alpha)=\alpha\beta$ οπότε $x_0=\alpha$

Αν $g(\beta)=0$ τότε $\beta f(\beta)=\alpha\beta$ οπότε $x_0=\beta$

Αν $g(\alpha)g(\beta)<0$ τότε βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0)=\alpha\beta$

ΘΕΜΑ 83

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$ τέτοιος, ώστε $\mathbf{f(x)\leq g(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$. Αν υπάρχουν $\mathbf{x_1,x_2\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_1)=x_1}$ και $\mathbf{g(x_2)=x_2}$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{h(x_0)=x_0}$, όπου $\mathbf{h:[\alpha,\beta]\to R}$ με $\mathbf{h(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)}$, $\mathbf{\lambda\in[0,1]}$.

Λύση

$f(x) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)g(x) \leq g(x) \Leftrightarrow$

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Τότε $f(x)-x \leq h(x)-x \leq g(x)-x$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Για $x=x_1$ και $x=x_2$ έχουμε

$0 = f(x_1)-x_1 \leq h(x_1)-x_1 \leq g(x_1)-x_1$ και

$f(x_2)-x_2 \leq h(x_2)-x_2 \leq g(x_2)-x_2 = 0$

Άρα $h(x_1)-x_1 \geq 0$ και $h(x_2)-x_2 \leq 0$

οπότε βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[x_1,x_2]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=x_0$.

ΘΕΜΑ 84

Να υπολογίσετε το όριο: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

Λύση

Έχουμε $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln 1+2^x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln 3+\ln\left(1+\dfrac{1}{3^x}\right)}{x\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{3^x}\right)}{\ln 2+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$$

ΘΕΜΑ 85

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ και $g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με τις ιδιότητες $g(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Λύση

Έστω $h:[\alpha,\beta]\to R$ με $h(x)=f(x)-g(x)$

$h(\alpha) = f(\alpha)-g(\alpha) = f(\alpha)-\alpha$

$h(\beta) = f(\beta)-g(\beta) = f(\beta)-\beta$

Όμως $\alpha \le f(x) \le \beta \iff 0 \le f(x)-\alpha \le \beta-\alpha$

$\alpha-\beta \le f(x)-\beta \le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta) \le 0$

Αν $h(\alpha)=0$ τότε $f(\beta)=g(\beta)$ και η ρίζα είναι α.

Αν $h(\beta)=0$ τότε $f(\beta)=g(\beta)$ και η ρίζα είναι β.
Αν $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$.

ΘΕΜΑ 86

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις: $f(x) = |A+xB|$, $h(x) = |A-xB|$ όπου **A, B** είναι πίνακες $\nu\times\nu$ και $x\in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = h(x_0)$.

Λύση

Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $g(x) = f(x)-h(x)$

είναι $g(-1) = f(-1)-h(-1)$

$g(1) = f(1)-h(1)$

$$g(-1)\cdot g(1) = (f(-1)-h(-1))(f(1)-h(1)) =$$
$$= (h(1)-f(1))(f(1)-h(1)) = -(h(1)-f(1))^2 < 0$$

διότι $f(-1) = |A-B|$, $f(1) = |A+B|$, $h(-1) = |A+B|$ και $h(1) = |A-B|$
Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$ που σημαίνει $f(x_0)-h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$

ΘΕΜΑ 87

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις **f, g** για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x \ , \ x\in U(x_0,\alpha)$$

Να αποδείξετε ότι οι **f, g** είναι συνεχείς στο $x_0=\pi$.

Λύση

Είναι $f^2(x) \leq \eta\mu^2 x$ και $g^2(x) \leq \eta\mu^2 x$

Επομένως $|f(x)| \leq |ημx|$ και $|g(x)| \leq |ημx|$

Δηλαδή $-|ημx| \leq f(x) \leq |ημx|$ και $-|ημx| \leq g(x) \leq |ημx|$

Σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = 0 = \lim_{x \to \pi} g(x)$$

ΘΕΜΑ 88

Δίνονται οι συναρτήσεις **f, g** για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) + ημ^2x = 2xf(x) + 2g(x)ημx$$

για κάθε $x \in U(x_0, α)$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις **f, g** είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

Έχομε $(f(x)-x)^2 + (g(x)-ημx)^2 = x^2$

επομένως $(f(x)-x)^2 \leq x^2$ και $(g(x)-ημx)^2 \leq x^2$

Συνεπώς $|f(x)-x| \leq |x|$ και $|g(x)-ημx| \leq |x|$

δηλαδή $-|x| \leq f(x)-x \leq |x|$ και $-|x| \leq g(x)-ημx \leq |x|$

Άρα $x-|x| \leq f(x) \leq x+|x|$ και $ημx-|x| \leq g(x) \leq |x|+ημx$

που σημαίνει από το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

ΘΕΜΑ 89

Δίνονται οι συναρτήσεις **f, g** ορισμένες στο $U(x_0, α)$ με

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$ και $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, $x\in U(x_0,\alpha)$. Να αποδείξετε

ότι $$\lim_{x \to 0} \frac{f^3(x)\eta\mu^2 x}{f^2(x)+g^2(x)} = 0$$

Λύση

Είναι $$\left|\frac{f^3(x)\eta\mu^2 x}{f^2(x)+g^2(x)}\right| \le \frac{|f^3(x)|}{f^2(x)+g^2(x)} \le \left|\frac{f^3(x)}{f^2(x)}\right| = |f(x)|$$

Επομένως $$-|f(x)| \le \frac{f^3(x)\eta\mu^2 x}{f^2(x)+g^2(x)} \le |f(x)|$$

επειδή $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

προκύπτει ότι και $$\lim_{x \to 0} \frac{f^3(x)\eta\mu^2 x}{f^2(x)+g^2(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ 90

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x) \le 2f(x)+4g(x)+\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-4$$

για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x)$$

Λύση

Έχουμε: $(f(x)-1)^2+(g(x)-2)^2 \le \left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

Επίσης: $0 \le (f(x)-1)^2 \le (f(x)-1)^2+(g(x)-2)^2 \le \left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

άρα $|f(x)-1| \le \sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}$ και $|g(x)-2| \le \sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}$

αλλά $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}=0$

Επομένως $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=1$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)=2$

ΘΕΜΑ 91

Έστω $\mathbf{f:[-\alpha,\alpha]\to[-\alpha,\alpha]}$ μια συνάρτηση συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\boldsymbol{\xi\in(-\alpha,\alpha)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(\xi)=\xi}$ και τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0\in(-\alpha,\alpha)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=-x_0}$.

Λύση

Έστω $g:[-\alpha,\alpha]\to R$ με $g(x)=f(x)-x$

$g(-\alpha) = f(-\alpha)+\alpha \ge 0$

$g(\alpha) = f(\alpha)-\alpha \le 0$ διότι $-\alpha \le f(x) \le \alpha$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$

Άρα $g(\alpha)\cdot g(-\alpha) \le 0$

Αν $g(-\alpha)=0$ τότε $\xi=-\alpha$ και αν $g(\alpha)=0$ τότε $\xi=\alpha$.

Αν $g(\alpha)\cdot g(-\alpha) < 0$ τότε βάσει του θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi\in[-\alpha,\alpha]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

Όμοια εργαζόμαστε και για (ii) θεωρώντας

$h(x) = f(x)+x \quad , \quad x\in[-\alpha,\alpha]$

ΘΕΜΑ 92

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις **f:R→R** τέτοιες, ώστε **f(2x+1)=f(x)** για κάθεα **x∈R.**

Λύση

Θεωρούμε $2x+1=t$ οπότε έχουμε

$$f\left(\frac{t-1}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{t-1}{2}-1}{2}\right)=f\left(\frac{t-3}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{t-3}{4}-1}{2}\right)=$$

$$=f\left(\frac{t-7}{8}\right)=\ldots=f\left(\frac{t-2^{\nu}+1}{2^{\nu}}\right)$$ για κάθε $\nu\in N$.

Θεωρούμε την ακολουθία $x_{\nu}=\dfrac{t-2^{\nu}+1}{2^{\nu}}$

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{\nu}=-1$$

Όμως $f(t)=f(x_{\nu})$ και αφού η f είναι συνεχής, έχουμε για ν →∞

$$f(t)=\lim_{\nu\to\infty} f(x_{\nu})=f(-1)$$

Συνεπώς $f(x)=f(-1)=$σταθερά.

ΘΕΜΑ 93

Θεωρούμε τη συνάρτηση **$f:R_{+}\to R$** τέτοια, ώστε **$f(x)e^{f(x)}=x$**, για κάθε **$x>0$**. Αποδείξτε ότι:

(i) η **f** είναι μονότονη

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$

Λύση

(i) $f(x) = xe^{-f(x)}$, $x>0$

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R_+.

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο R_+. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in R_+$, $x_1<x_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Τότε $e^{-f(x_1)} \leq e^{-f(x_2)} \Leftrightarrow x_1 \cdot e^{-f(x_1)} < x_1 \cdot e^{-f(x_2)} < x_2 \cdot e^{-f(x_2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (άτοπο).

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) Θα αποδείξουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη άνω.

Υποθέτουμε ότι η f είναι φραγμένη άνω. Τότε υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε $f(x)<M$, για κάθε $x>0$.

Από το Θ. Αρχιμήδης υπάρχει $x>0$ τέτοιο, ώστε $x \geq Me^M$

Όμως $f(x)<M \Rightarrow e^{f(x)}<e^M$ οπότε $f(x)e^{f(x)}<f(x)e^M \leq Me^M$

Άρα $x<Me^M$ (άτοπο)

Συνεπώς η f είναι μη φραγμένη άνω και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

(iii) $x=f(x)e^{f(x)}$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

Έχουμε $\ln x = \ln[f(x)\, e^{f(x)}] \Leftrightarrow$

$$\ln x = \ln f(x)+f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{f(x)} = 1 + \frac{\ln f(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)} = 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\ln y}{y} = 1 + 0 = 1$$

ΘΕΜΑ 94

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ που πληρούν

τις συνθήκες:

(i) $f(xf(y))=yf(x)$ για κάθε $x,y>0$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Λύση

Θέτουμε $x=y$ και έχουμε $f(xf(x))=xf(x)$ οπότε υπάρχουν $z=xf(x)>0$ τέτοιοι, ώστε $f(z)=z$. Έστω α ένας από αυτούς.

Έχουμε $f(\alpha^2) = f(\alpha f(\alpha)) = \alpha f(\alpha) = \alpha^2$

$f(\alpha^3) = f(\alpha f(\alpha^2)) = \alpha^2 f(\alpha) = \alpha^3$

....

$f(\alpha^\nu) = \alpha^\nu$, για κάθε $\nu \geq 1$

Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha^\nu\to\infty$ άτοπο λόγω της i)

Έχουμε $\alpha=f(\alpha)=f(1\cdot f(\alpha))=\alpha\cdot f(1)$ $\quad \alpha[f(1)-1]=0 \Leftrightarrow f(1)=1$, διότι $\alpha\neq 0$

Άρα $\alpha f(\alpha^{-1}) = f(\alpha^{-1}f(\alpha)) = f(1)=1$ και επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $f(\alpha^{-\nu})=\alpha^{-\nu}$.

Άρα δεν μπορεί $\alpha<1$. Συνεπώς $\alpha=1$ και

$$xf(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x} \ , \quad x>0$$

ΘΕΜΑ 95

Έστω $\mathbf{f:(0,\infty)\to R}$ μια συνάρτηση αύξουσα τέτοια, ώστε υπάρχει $\mathbf{\nu\in N}$, $\mathbf{\nu\geq 2}$ για τον οποίο $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(\nu x)}{f(x)}=1$

Να υπολογιστεί το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(\alpha x)}{f(x)}$, $\alpha\in R$, $\alpha>0$

Λύση

- Έστω $\alpha>1$. Τότε υπάρχει $m\in N$ τέτοιο, ώστε $\alpha \le n^n$ και επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε

$f(\alpha x) \ge f(x)$ και $f(\alpha x) \le f(n^m x)$

Άρα $1 \le \dfrac{f(\alpha x)}{f(x)} \le \dfrac{f(n^m x)}{f(x)} = \dfrac{f(nx)}{f(x)} \cdot \dfrac{f(n^2 x)}{f(nx)} \cdots \dfrac{f(n^m x)}{f(n^{m-1}x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(nx)}{f(x)} \cdot \dfrac{f(n^2x)}{f(nx)} \cdots \dfrac{f(n^m x)}{f(n^{m-1}x)} = 1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(\alpha x)}{f(x)} = 1$

- Έστω $\alpha\in(0,1)$. Τότε υπάρχει $m\in N$, τέτοιο, ώστε $n^{-m}<\alpha$.

Άρα $f(\alpha x) \le f(x)$ και $f(\alpha x) \ge f(n^{-m}x)$

και $1 \le \dfrac{f(x)}{f(\alpha x)} \le \dfrac{f(x)}{f(n^{-m}x)} = \dfrac{f(x)}{f(n^{-1}x)} \cdot \dfrac{f(n^{-1}x)}{f(n^{-2}x)} \cdots \dfrac{f(n^{m-1}x)}{f(n^{-m}x)}$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f(\alpha x)} = 1$ οπότε $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(\alpha x)}{f(x)} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(\alpha x)}{f(x)} = 1$ για κάθε $\alpha>0$.

ΘΕΜΑ 96

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και $\mathbf{k,\lambda>0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{kf(\alpha)+\lambda f(\beta)=(k+\lambda)f(\xi)}$

Λύση

Έστω $g(x) = \dfrac{k}{k+\lambda}[f(\alpha)-f(x)] + \dfrac{\lambda}{k+\lambda}[f(\beta)-f(x)]$

$g(\alpha) = \dfrac{\lambda}{k+\lambda}[f(\beta)-f(\alpha)]$

$$g(\beta)=\frac{k}{k+\lambda}[f(\alpha)-f(\beta)]$$

$$g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\frac{k\lambda}{(k+\lambda)^2}[f(\alpha)-f(\beta)]^2\leq 0$$

- Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε $\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$
- Αν $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε $g(\alpha)g(\beta)<0$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{k}{k+\lambda}[f(\alpha)-f(\xi)]+\frac{\lambda}{k+\lambda}[f(\beta)-f(\xi)]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad k\,f(\alpha)+\lambda\,f(\beta)=(k+\lambda)\,f(\xi)$$

ΘΕΜΑ 97

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{g:R\to R}$ και $\mathbf{h:R\to R}$ γνησίως αύξουσες και $\mathbf{g(R)=R}$, $\mathbf{h(R)=R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\alpha^{g(x)}+h(x)}$, $\mathbf{\alpha>1}$ είναι **"1-1"** και $\mathbf{f(R)=R}$.

Λύση

h-γνησίως αύξουσα και αg(x) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς η f είναι "1-1".
Επειδή οι g και h είναι γνησίως αύξουσες και g(R)=R, h(R)=R, αυτές είναι συνεχείς. Άρα και η f είναι συνεχής.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}[\alpha^{g(x)}+h(x)]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{οπότε} \quad f(R)=R.$$

ΘΕΜΑ 98

Να βρεθούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις $\mathbf{g:R\to R}$ για τις

οποίες ισχύει: $\mathbf{g(g(x+y))=yg(y)+xg(x)}$ *(1)* για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$.

Λύση

Για $x=y=0$ η *(1)* δίνει $g(f(0))=0$

Για $y\to -x$ η *(1)* δίνει $g(g(0))=xg(x)-xg(-x)$ ή
$xg(x)=xg(-x)$ ή
$g(x)=g(-x)$

Για $y\to x$ η *(1)* δίνει: $g(g(2x))=2xg(x)$

Για $y=0$ $g(g(x))=xg(x)$

Για $g(x)\to x$ προκύπτει $g(x)=x^2$, $x\in R$.

ΘΕΜΑ 99

Έστω $\mathbf{f,g:R\to R}$ με $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $\mathbf{x\in R}$. Αν ισχύει $\mathbf{f(g(x+1998))\geq f(x)\geq f(g(x)+1998)}$ να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{g}$.

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:
$f(g(x)+1998)\geq f(x)\geq f(g(x)+1998)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $g(x)+1998\geq x\geq g(x)+1998$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $g(x)=x-1998$

ΘΕΜΑ 100

Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ και για μια σταθερά $\mathbf{c\neq 0}$ ισχύουν:

(i) $\mathbf{f}$: άρτια στο $\mathbf{R}$.

(ii) Η συνάρτηση $g:R\to R$, με $g(x)=f(x-c)$ είναι περιττή στο R, να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική.

Λύση

$g(-x)=-g(x)$ ή $f(-c-x)=-f(x-c)$ ή $f(-x-c)+f(c-x)=0$

Όμως $f(x-c)=f(c-x)$. Άρα

για $x\to x+c$: $f(x)=f(c-x-c)=f(-x)$

Η σχέση $f(-x-c)=-f(c-x)$

για $x\to x+c$: $f(-x-c-c)=-f(c-x-c)$ ή $f(-x-2c)=-f(-x)$

για $x\to x-2c$: $f(-x+2c-2c)=-f(-x-2c)$ ή

$-f(-x-2c)=f(-x)=f(x)$

για $x\to x-c$: $-f(-x+c-2c)=f(x-c)$ ή

$-f(-x-c)=f(x-c)$ ή

$-f(-x-c)=-f(c-x)$ ή

$f(c-x)=f(-x-c)$

για $x\to -x$: $f(c+x)=f(x-c)$

για $x\to x+c$: $f(x+2c)=f(x)$

άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2c$.

ΘΕΜΑ 101

Βρείτε όλες τις "1-1" συναρτήσεις $f:R^*\to R^*$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f(f(x))f(x)=1$, για κάθε $x\in R$.

Λύση

$f(f(x))f(x)=1$ *(1)*

$$x\to f(x):\quad (1)\Rightarrow\quad f(f(f(x)))f(f(x))=1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(f(f(x)))\cdot\frac{1}{f(x)}=1$$

$$f(f(f(x))) = f(x) \overset{f:1-1}{\Rightarrow}$$
$$f(f(x))=x \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} xf(x)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in R^*$$

Πράγματι $f:R^*\to R^*$, με $f(x)=\frac{1}{x}$.

ΘΕΜΑ 102

Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση **$f:R\to R$**, που είναι "1-1" και **$f^2(x)\le f(x)f(1-x)$** για κάθε **$x\in R$**.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση

$$f^2(x)\le f(x)f(1-x) \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)(f(x)-f(1-x))\le 0$$

$x\to 1-x$: $(1)\Rightarrow f^2(1-x)\le f(1-x)f(x) \quad (2)$

$$f(1-x)(f(x)-f(1-x))\ge 0$$

Άρα $\quad -f(x)f(1-x)[f(x)-f(1-x)]^2\ge 0$

$$\Rightarrow f(x)f(1-x)\le 0 \quad (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} f^2(x)\le 0 \Rightarrow f(x)=0, \ x\in R$$

Για $x_1,x_2\in R$, με $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=0$

άρα η f δεν είναι "1-1", άτοπο, επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

ΘΕΜΑ 103

Βρείτε όλες τις συναρτήσεις **$f:R\to R$**, για τις οποίες

$f(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$ για κάθε **$x,y\in R$**.

Λύση

$f(x+y)=f^2(x)+f^2(y) \quad (1)$

Η *(1)* για x=y=0 γίνεται

$$f(0)=2f^2(0) \;\Leftrightarrow\; f(0)=0 \;\text{ ή }\; f(0)=\frac{1}{2}$$

Αν $f(0)=0$ τότε η *(1)* για y=0 δίνει:

$$f(x)=f^2(x) \;\Leftrightarrow\; f(x)=0 \;\text{ ή }\; (f(x)=1,\text{ απορρίπτεται})$$

Αν $f(0)=\frac{1}{2}$ τότε για y=0 η *(1)* δίνει:

$$f(x)=f^2(x)+\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2=0 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2}$$

Άρα η συναστήσεις είναι η $f(x)=0$, $f(x)=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 104

Βρείτε συνάρτηση **$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, με **$f(0)\neq 0$** που ικανοποιεί τη σχέση:

$f(x)f(y)=f(x+xy)$ για κάθε **$x,y\in\mathbb{R}$**.

Λύση

$f(x)f(y)=f(x(1+y)), \quad x,y\in \mathbb{R} \quad (1)$

Η *(1)* για x=y=0 δίνει: $f(0)=1$, αφού $f(0)\neq 0$ (υπόθεση)

Η *(1)* για x=y=-1 δίνει: $(f(-1))^2=f(0)=1$, άρα $f(-1)=\pm 1$

Η *(1)* για y=-1 δίνει: $f(x)f(-1)=f(0) \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{f(-1)} \;\Rightarrow\; f(x)=\pm 1$.

ΘΕΜΑ 105

Αν η **f** είναι συνάρτηση "1-1" στο **R** και ισχύει:

$f(x+f(y))=f(x+y)+1$, για κάθε **$x,y\in R$**, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης **f**.

Λύση

Θέτοντας $x=0$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$f(0+f(y))=f(0+y)+1 \Leftrightarrow f(f(y))=f(y)+1$

Θέτοντας $x=f(y)$ στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$f(x)=x+1$ με $x\in R$ η οποία είναι συνάρτηση "1-1" στο R και πληρεί τη σχέση της υπόθεσης.

ΘΕΜΑ 106

Έστω η συνάρτηση **f** για την οποία ισχύει **$f(xy)=f(x)f(y)$** για κάθε **$x,y\in R^*$**, με **$f(1)\neq 0$**. Να αποδείξετε ότι αν η **f** είναι συνεχής συνάρτηση στο **$x_0=\alpha\in R^*$**, τότε η **f** είναι συνεχής στο **R^***.

Λύση

Θέτοντας $x=y=1$ η σχέση της υπόθεσης γράφεται:

$$(f(1))^2=f(1) \Leftrightarrow f(1)(f(1)-1)=0 \underset{f(1)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(1)=0+1$$

Για $x=\alpha$ και $y=1$ η σχέση της υπόθεσης γίνεται:

$f(\alpha\cdot 1)=f(\alpha)f(1) \Rightarrow f(\alpha)=1.$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha\neq 0$, άρα ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)=1=f(1)$$

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\omega\in R^*$ και $\omega\neq\alpha$. Θέτουμε $x=\omega h$.

Επειδή $x\to\omega$, έπεται ότι $h\to 1$. Επομένως

$$\lim_{x\to\omega} f(x)=\lim_{h\to 1} f(\omega\cdot h)=\lim_{x\to 1}(f(\omega)\cdot f(h))=f(\omega)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο R^*.

• Προτεινόμενες ασκήσεις

1

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \sqrt{x+1} + 1$

(ii) $f_2(x) = (x+1)^3 - 1$

(iii) $f_3(x) = ημx - συνx$

(iv) $f_4(x) = e^{2x-1} + 1$

(v) $f_5(x) = 4\,ημ2x$

(vi) $f_6(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(vii) $f_7(x) = \ln|x|$

(viii) $f_8(x) = \ln\dfrac{1}{x}$

(ix) $f_9(x) = \ln 2x - 1$

(x) $f_{10}(x) = \ln|x| + 1$

(xi) $f_{11}(x) = 2\,ημ\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(xii) $f_{12}(x) = 3^x - 1$

(xiii) $f_{13}(x) = |x^2 - 5x + 6|$

2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x-4$

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

3

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(3+\sqrt{8})^x+(3-\sqrt{8})^x-6$

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(5+\sqrt{24})^x+(5-\sqrt{24})^x-10$

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

5

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και ισχύει:

$g\left(\dfrac{g(x)+1998x}{1999}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της g.

6

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{1998}{\sqrt{1999+x^{2000}}}+2000\ ,\ x>0$.

Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης **f**.

7

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$, αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $f(x)-x\le x^2\le f(x-1)+x$

(ii) $f(x)+x\le x^2\le f(x+1)-x$

(iii) $f(x)+x\le x^2+1\le f(x+1)-x$

(iv) $f(x-1)+3\le 2x\le f(x+1)-1$

8

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$ με $f(0)\neq 0$, αν ισχύει μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(i) $f(x)\,f(y)=f\,(y+xy)$ για κάθε $x,y\in R$

(ii) $f(x)\,f(y)=f\,(x^2-xy)$ για κάθε $x,y\in R$

(iii) $f(x)\,f(y)=f\,(xy+y^{2)}$ για κάθε $x,y\in R$

9

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:R \to R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^4 - y^4)(f(x) - f(y)) \leq 0$$

για κάθε $\mathbf{x,y \in R}$ με $\mathbf{f(0)=1998}$. Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{f_{max}=1998}$.

10

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ με $\mathbf{f(1)=1}$ και $\mathbf{f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)}$ για κάθε $\mathbf{\alpha,\beta \in R}$ με $\mathbf{f(x)\, f\left(\frac{1}{2}\right)=1}$ για όλα τα $\mathbf{x \neq 0}$. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=x}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$.

11

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $\mathbf{f:R_+ \to R}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $\mathbf{f(x+y)=f(x^2)+f(y^2)}$ για κάθε $\mathbf{x,y \in R_+}$.

(E.M.E. 1990)

12

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $\mathbf{f:R \to R}$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$2f(x+y+xy)=\alpha f(x)+\beta f(y)+f(xy)$$

για κάθε $\mathbf{x,y \in R}$ με $\mathbf{\alpha^2+\beta \neq \beta^2+\alpha}$ για $\mathbf{\alpha,\beta \in R}$.

(E.M.O. 1987)

13

Έστω $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία πραγματική και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με την ιδιότητα: $g(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι: $g(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

14

Έστω $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία πραγματική συνάρτηση με την ιδιότητα:

$g(x-y)=g(x)g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

15

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με την ιδιότητα:

$g(x+y)=g(g(x))+g(g(y))$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$.

(i) Να αποδείξτε ότι $g(x)+g(y)=g(0)+g(x+y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$.

(ii) Αν $g(-x)=g(x)$, να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

16

Να βρείτε τον τύπο της $f:\mathbf{R}-\{0,1\}\to\mathbf{R}$ αν ισχύει:

$f\left(x-\frac{1}{x}\right)-2f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbf{R}-\{0,1\}$.

17

Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f:R\to R}$ αν για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$ ισχύει:

$$\mathbf{xf(x)+yf(y)=(x+y)f(x)f(y)}$$

18

Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f:R\to R}$ αν ισχύει:

$\mathbf{f(x)f(y)-xy=f(x)+f(y)-1}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$.

19

Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f:R\to R}$ αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις

(i) $\mathbf{f(x+y)=f(x)+2y}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$

(ii) $\mathbf{f(x+y)=f(x)-y}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$

(iii) $\mathbf{f(x+y)=f(x)+10y}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$

20

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $\mathbf{f,g:R\to R}$ τέτοιες ώστε για κάποιο $\mathbf{\alpha>0}$ ισχύει: $\mathbf{g(x)=f(x+\alpha)}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι άρτια και η $\mathbf{g}$ περιττή, να αποδείξετε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι περιοδικές.

(Ε.Μ.Ε. 1990)

21

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ για την οποία ισχύει:

$$\mathbf{f(x+T)=\frac{f(x)\,συνθ-ημθ}{f(x)\,ημθ+συνθ}\quad ,T\neq 0}$$

Να αποδείξετε ότι, αν $\mathbf{θ=\frac{π}{ν}}$ τότε η $\mathbf{f(x)}$ είναι περιοδική.

(Ε.Μ.Ε. 1986)

22

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\mathbf{f:R \to R}$ με $\mathbf{f(0)\neq 0}$, αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $\mathbf{f(x^2-y^2)=f(x)f(x-y)}$

(ii) $\mathbf{f(x^2-y^2)=f(x)f(x+y)}$

(iii) $\mathbf{f(x^3-y^3)=f(y)f(x-y)}$

(iv) $\mathbf{f(x^2-xy)=f(x)f(x-y)}$

23

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\mathbf{f:R \to R}$ αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $\mathbf{f(xy)+f(x)+f(y)+3=x+y+xy}$

(ii) $\mathbf{f(xy)+f(x)+f(y)=xy+x+y}$

(iii) $f(xy)+x+y=xy+f(x)+f(y)$

(iv) $f(xy)+f(x)+f(y)=xy+x+y+3$

24

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)+f(y)}$ για κάθε $x,y\in R$. Αν η f δεν παίρνει τις τιμές 1, -1 τότε για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ ισχύει: $g(x+y)=g(x)g(y)$ για κάθε $x,y\in R$.

25

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

$f(x+y)f(x-y)=(f(x)f(y))^2$ για κάθε $x,y\in R$.

26

Αν f συνεχής πραγματική συνάρτηση για την οποία υπάρχει σταθερός πραγματικός αριθμός k τέτοιος ώστε: $f(f(x))=kx^9$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , να αποδείξετε ότι $k\geq 0$.

27

Δίνεται μία συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα στο R και που

αληθεύει τη σχέση $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Μία συνάρτηση g ορίζεται από τη σχέση: $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$.

(i) Αποδείξτε ότι $0 < g(x) < f(x)$ για κάθε $x \in R$

(ii) Αν $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η g είναι αύξουσα στο Δ.

(Ε.Μ.Ε. 1979)

28

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ και $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$. Αν μία συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ ικανοποιεί τη συνθήκη $f(f(x)) = \alpha f(x) + \beta x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) $f(1001^{999}) < f(1000^{1000})$

(iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

30

Έστω $g: R \rightarrow R$ για την οποία ισχύουν:

$g(x+y)=g(y)g(c-x)+g(x)g(c-y)$ για κάθε $x,y\in \mathbb{R}$ και. $c\in \mathbb{R}$ με $g(0)=2000$. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

31

Δίνονται οι συναρτήσεις: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(g(x))=x$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$ και ο πραγματικός αριθμός α με $|\alpha|\neq 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\alpha f(x)+f(g(x))=h(x) \text{ για κάθε } x\in \mathbb{R}.$$

(Ε.Μ.Ε. 1987)

32

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $f(xy)+f(x)+f(y)=x^2f(y)+x^2+y^2$

(ii) $f(xy)+x^2y^2=f(x)f(y)+y^2f(x)$

(iii) $f(xy)+x^2f(y)=f(x)f(y)+y^2f(x)$

(iv) $f(xy)+f(x)+f(y)=f(x)f(y)-4$

33

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=x$ και $g(x)=x+f(x)$. Αν η g είναι γνησίως μονότονη, να βρεθεί ο τύπος της.

34

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R \to R$ αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1=xy$ για κάθε $x,y \in R$

(ii) $f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1=x^2y^2$ για κάθε $x,y \in R$

(iii) $f(x)f(y)+(y+1)f(x)-2(x-1)f(y)-4y=4$ για κάθε $x,y \in R$

(iv) $f(x)f(y)+xf(y)=2yf(x)$ για κάθε $x,y \in R$.

35

Δίνεται ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο R ικανοποιεί τη συνθήκη: $999f(\pi-x)+998f(x-\pi)=1996συνx$. Να αποδείξετε ότι ικανοποιεί και την:

$$f^2(\pi+x)+f^2(\pi/2-x)=(1996/1997)^2.$$

(Θαλής Ε.Μ.Ε. 1996)

36

Έστω $g:[\alpha,\beta] \to R$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή της g και M είναι η μέγιστη τιμή της g να αποδείξετε ότι:

$$g^2(x) \leq (m+M)g(x)-mM$$

37

Έστω $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει: $g(xy)-\sqrt{y}\,g(x)=\sqrt{x}\,g(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Αν η g είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0\in(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

38

Έστω $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) $f(x)+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$

(iii) $f(x)\cdot f\left(f(x)+\dfrac{1}{x}\right)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$

(α) Να βρείτε το $f(1999)$

(β) Να βρείτε μία συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες.

(E.M.E. 1990)

39

Να βρεθούν όλες οι ρητές συναρτήσεις $f(x)$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f(x)+x\,f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+\dfrac{1}{x}\,f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=x^2$

(E.M.E. 1990)

40

Έστω $f,g:[0,1]\to R$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x,y\in[0,1]$ ώστε $|f(x)+g(y)-xy|\geq\frac{1}{4}$

41

Έστω $g:R\to R$ μία πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$g(x+y)=g(x)g(y)$ για κάθε $x,y\in R$ και υπάρχει $x_0\in R$ ώστε $g(x_0)\neq0$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g(x)\neq0$ για κάθε $x\in R$

(ii) $g(-x)g(x)=1$ για κάθε $x\in R$

(iii) $g(x)>0$

(iv) Αν η εξίσωση $g(x)-1=0$ έχει μοναδική ρίζα τη $\varrho=0$ τότε η g είναι "ένα προς ένα"

(v) Ισχύει $g^{-1}(xy)=g^{-1}(x)+g^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in R_+^*$ με $g(R)=(0,+\infty)$.

42

Έστω $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $g(x)=f_1(x^4)+(2x^3+5)f_2(x^4)$ έχει παράγοντα το x^3+x^2+x+1 . Να αποδείξετε ότι $f_1(1)=f_2(1)=0$.

43

Έστω g μία συνάρτηση "ένα προς ένα" με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Αν ισχύει:

$g(1998x+199y)=1998g(x)+1999g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$g^{-1}(1998x+1999y)=1998g^{-1}(x)+1999g^{-1}(y)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

44

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1-x_2\neq k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

45

Οι πραγματικές συναρτήσεις f και g ορίζονται σε διάστημα $\Delta\in\mathbb{R}$ και ισχύει: $\dfrac{f(x)\,f(y)}{g(x)\,g(y)}=\dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$ για κάθε $x,y\in\Delta$.

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση: $\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}=c$, όπου c σταθερός για κάθε $x\in\Delta$. Να βρείτε δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις πιο πάνω σχέσεις με το $c=1$.

46

Εκλέγοντας τυχαία ένα αριθμό λ από το σύνολο $A=\{1,2,...,1999\}$ να βρεθεί η πιθανότητα ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\lambda x)}{x}=1998$$

47

Αποδείξτε ότι η εξίσωση: $x^2\text{-}x\eta\mu x\text{-}\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

48

Αποδείξτε ότι η εξίσωση: $2^{x+1}x+2^{x+1}=1$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $[-1,0]$.

49

Δίνεται η συνάρτηση $f:R_+^*\to R$ με τύπο $f(x)=9^x\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{3^x}\right)$.

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

50

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, $\alpha>0$ και

$f(\alpha)\neq 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\alpha)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f(x_0)}{\alpha - x_0}=\frac{f(\alpha - x_0)}{x_0}$$

51

Για τον αντιστρέψιμο πίνακα A τύπου $\nu\times\nu$ ορίζουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)=|A-xI|$ και $g(x)=|A^{-1}-xI|$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0)=0$, τότε

(i) $x_0\neq 0$ (ii) $g\left(\frac{1}{x_0}\right)=0$

(Ιούνιος 1993)

52

Έστω $g:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$g(x+y)-g(x)-g(y)=x\eta\mu^4x+y\eta\mu^8y\,.$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο R.

53

Έστω η πραγματική συνάρτηση $g:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$g(x+y)=g(x)+g(y)+\alpha xy$ για κάθε $x,y\in R$ και η σταθερά πραγματικός αριθμός. Αν η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο R.

54

Έστω $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g(xy)+g(x+y-xy)=g(x)+g(y)$$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$.

Αν η πραγματική συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

55

Αν για κάθε $x\in[0,\pi]$ η g είναι συνεχής και ισχύει:

$2\eta\mu^2x+2000f^5(x)=1999$ να αποδείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,\pi)$.

56

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο $\mathbf{R}$ και ισχύουν:

$$\lim(f^2(x)+g^2(x))=2000 \text{ και } \lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))=20\sqrt{5}$$

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$

57

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$ και για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $f^2(x)+1998\eta\mu^2x=xf(x)$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

58

Αν η $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$ και για κάθε $\mathbf{x}\in \mathbf{R}^*$ ισχύει:

$$\eta\mu(2000x)-x^2\leq 2000xf(x)\leq (x+x^2)2000$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

59

Έστω $\mathbf{g}:[\alpha,\beta]\to \mathbf{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g^2(x)\leq g(\beta)g(x)-g(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

(ii) Υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει: $2g^2(x_0)\leq g2(\alpha)+g^2(\beta)$

60

Έστω $\mathbf{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία πραγματική συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 2000}\dfrac{g(x)-g(2000)}{x-2000}=1999$. Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $x_0=2000$.

61

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\mathbf{f},\mathbf{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f^2(x)+g^2(x)-4(f(x)+g(x))\leq 8+\eta\mu^2 4x$ για κάθε $x\in \mathbf{R}$.

Να υπολογίσετε τα όρια των: $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x)$.

62

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και φ με $f(x) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^x}$, $x \in N^*-\{1\}$

και $\varphi(x) = f(2)f(3)\ldots f(x)f(x+1)$ για κάθε $x \in N^*-\{1\}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $f(x+1) = 2^{x-1}\eta\mu\frac{\pi}{2^x}\varphi(x)$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{2}{\pi}$

(Ε.Μ.Ε. 1982)

63

Έστω μία πραγματική συνάρτηση $f(x)$, $x \in \Delta$ με την ιδιότητα:

$|f(x_1)-f(x_2)| < |x_1-x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η f είναι συνεχής

(ii) Η g με $g(x) = f(x)-x$, $x \in N$ είναι γνησίως φθίνουσα.

64

Αν η πραγματική συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει:

$$(1998+e^{1998\alpha})g(\alpha)+g(\beta)+e^{1999\beta}f(\beta)=0$$

Να δείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

65

Δίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x\,\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\varphi$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις γωνίες ω, φ του $(0,\pi)$ για τα οποία:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

66

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$$

67

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)>e^x+\frac{x^2+2000}{x^3+x^2+x+2000}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

68

Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις $\mathbf{h}$ και $\boldsymbol{\varphi}$ συνεχείς στο $[-2,2]$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)\,\eta\mu x - x\,h(x)}{x} = 2000 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)\,\eta\mu x - f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = 1998$$

Να βρεθούν τα σημεία που οι C_h και C_φ τέμνουν τον άξονα $y'y$.

69

Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει:

$$\alpha^2 g(\alpha) + \beta^2 g(\beta) + g(\alpha) + g(\beta) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

70

Έστω η συνεχής συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to R$ με $\alpha<\beta$ με $g(\alpha)g(\beta)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in N^*$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $(1998+\nu)g(\xi) = 1998g(\alpha) + \nu g(\beta)$.

71

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}\right)^x + \left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}\right)^x - 4$

(i) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι "ένα προς ένα".

(ii) Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$.

72

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{ημαx}{ημβx}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-συν^3x}{x^2}$

(iii) $\lim \dfrac{1-συνx}{x^2}$ (iv) $\lim\limits_{x \to α} \dfrac{ημx-ημα}{x-α}$

(v) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ημ(x+h)-ημx}{h}$ (vi) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ημ(x-1)}{1-x^3}$

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημ4x}{\sqrt{x+1}-1}$ (viii) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\, εφ\dfrac{πx}{2}$

(ix) $\lim\limits_{x \to \frac{π}{2}^+} \dfrac{εφx-\ln\left(x-\frac{π}{2}\right)}{x-\frac{π}{2}}$ (x) $\lim\limits_{x \to \frac{π}{2}^+} \dfrac{\sqrt{1+συν2x}}{\sqrt{π}-\sqrt{2x}}$

(xi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-συν2x+εφ^2z}{x\,ημx}$ (xii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (ημ\sqrt{x+1}-ημ\sqrt{x})$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

• ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Βασικές γνώσεις στον διαφορικό λογισμό

1 $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz στο να συμβολίζει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}$

2 Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια και ισχύει: $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ εξίσωση εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αλλά είναι συνεχής στο σημείο αυτό και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \ \text{ή} \ -\infty$$

τότε ορίζουμε ως εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία: $x = x_0$.

4 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και η g είναι

παραγωγίσιμη στο $u=f(x)$, τότε η συνάρτηση $g_o f$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει: $(gof)'(x)=(g(f(x))'=g'(f(x))f'(x)$

Αν $u=f(x)$ και $y=g(u)$ (κατά Leibniz) έχουμε τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

5 $d\,f(x)=f'(x)\,dx$

6 Αν f,g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε **εσωτερικό** x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε: $f(x)=g(x)+c$

7 Αν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)>f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

8 Αν $x_o\in\Delta$ και ισχύει $f(x)\geq f(x_o)$ τότε λέμε η f παρουσιάζει στο x_o ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f(x_o)$.

Αν $x_o\in\Delta$ και ισχύει $f(x)\leq f(x_o)$ τότε λέμε η f παρουσιάζει στο x_o μέγιστο με μέγιστη τιμή $f(x_o)$.

9 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα **εσωτερικό** σημείο Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_o)=0$.

10 Αν το $A(x_o,f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_o)=0$.

11 Αν η f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τότε το x_0 είναι σημείο καμπής, αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$.

12 Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

13 **Κανόνες de L' Hospital**

Για τα όρια πηλίκου (ισχύουν και στα πλευρικά όρια) που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$$

(Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις).

14 Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda\in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\lambda x) = \beta\in\mathbb{R}$$

15 Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

16 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσι-

άζει στο $x \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f.

17 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο**.

18 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **άρτια** αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

19 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιττή** αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

Σχόλιο: Όπως είναι γνωστό, αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

20 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T \neq 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει: (i) $x \in A$ και (ii) $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Σχόλιο: Αν μία συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο T, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T.

21 Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to R}$ λέγεται συνάρτηση "**1-1**", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

ή ισοδύναμα αν $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

(i) $(f^{\nu}(x))' = \nu(f(x))^{\nu-1} \cdot f'(x)$

(ii) $(\sqrt{f(x)})' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $f(x)>0$

(iii) $(\eta\mu\ f(x))' = \sigma\upsilon\nu\ f(x) \cdot f'(x)$

(iv) $(\sigma\upsilon\nu\ f(x))' = -\eta\mu\ f(x) \cdot f'(x)$

(v) $(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, $f(x)>0$

(vi) $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

(vii) $(\varepsilon\varphi\ f(x))' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\ f'(x) = (1+\varepsilon\varphi^2 f(x))\ f'(x)$

(viii) $(\sigma\varphi\, f(x))' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x) = -\,(1 + \sigma\varphi^2 f(x))\, f'(x)$

(ix) $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

(x) $(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x)$

(xi) $(\alpha^x)' = (e^{x\ln\alpha})' = \alpha^x \cdot \ln\alpha$

Κανόνες παραγώγισης

1. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

3. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

4. $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$

5. $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Βασικά Θεωρήματα

1 Θεώρημα **Rolle**

Αν μια συνάρτηση f είναι:

(i) συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$,

(ii) παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και

(iii) $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

2 Θεώρημα **Μέσης Τιμής** του Διαφορικού λογισμού

Αν μία συνάρτηση f είναι:

(i) συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και

(ii) παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\,(\beta-\alpha)$$

4 Αν μια συνάρτηση f είναι:

- είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

5 Αν δύο συναρτήσεις f, g :

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+c$$

6 Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

(i) Αν $\mathbf{f}'(\mathbf{x})>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}$ του Δ, τότε η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

(ii) Αν $\mathbf{f}'(\mathbf{x})<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}$ του Δ, τότε η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

7 Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha\ ,\ \beta)$ ένα κρίσιμο σημείο της $\mathbf{f}$, στο οποίο αυτή είναι συνεχής.

(i) Αν $\mathbf{f}'(\mathbf{x})>0$ στο (α,x_0) και $\mathbf{f}'(\mathbf{x})<0$ στο (x_0,β), τότε το $\mathbf{f}(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $\mathbf{f}$.

(ii) Αν $\mathbf{f}'(\mathbf{x})<0$ στο (α,x_0) και $\mathbf{f}'(\mathbf{x})>0$ στο (x_0,β), τότε το $\mathbf{f}(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $\mathbf{f}$.

(iii) Αν η $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $\mathbf{f}(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

1. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγός της $\mathbf{f}$ μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η $\mathbf{f}$ δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Συμπέρασμα: Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η $\mathbf{f}$ δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της $\mathbf{f}$ στο διάστημα Δ.

8 Έστω μια συνάρτηση **f** παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f'(x_0)=0$ και υπάρχει η $f''(x_0)$.

(i) Αν $f''(x_0)<0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

(ii) Αν $f''(x_0)>0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

9 Έστω μια συνάρτηση **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

(i) Λέμε ότι η **f** είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** στο $[\alpha,\beta]$, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

(ii) Λέμε ότι η **f** είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο $[\alpha,\beta]$, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

10 Έστω μια συνάρτηση **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).

(i) Αν $f''(x)>0$ στο (α,β) τότε η **f** στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο $[\alpha,\beta]$.

(ii) Αν $f''(x)<0$ στο (α,β) τότε η **f** στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο $[\alpha,\beta]$.

11 Αν το $P(x_0,f(x_0))$ είναι ένα σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της **f** τότε: $f''(x_0)=0$ ή δεν υπάρχει f'' στο x_0.

Παρατήρηση: Τις θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης αναζητούνται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $f''(x)=0$ και των σημείων του πεδίου ορισμού της **f**, στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Η διαδικασία για τη μελέτη και τη χάραξη μιας γραφικής παράστασης ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της **A**.
2. Αναζητούμε συμμετρίες (άρτια, περιττή, περιοδική).
3. Εξετάζουμε τη συνέχειά της στο **A**.
4. Βρίσκουμε τις παραγώγους **f′** και **f″**, όπου αυτές υπάρχουν, και προσδιορίζουμε το πρόσημό τους.
5. Προσδιορίζουμε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της **f** (αν υπάρχουν).
6. Προσδιορίζουμε τα κοίλα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της **f**.
7. Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν.
8. Εντοπίζουμε, αν υπάρχουν, τα σημεία της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Βασικές σχέσεις

1 $f' = f \iff f(x) = ce^x$

2 $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3 $|\eta\mu x| \leq |x| \leq |\varepsilon\varphi x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4 $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$

5 Ισχύει $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων (χρησιμοποιώντας τον ορισμό) **$f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$** με **$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\eta\mu 3x$** και **$h(x)=e^{2x}$**.

Λύση

Αν x_0 είναι τυχαίο σημείο του R τότε για $x\neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\,x_0}+\sqrt[3]{x_0^2})}{(x-x_0)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\,x_0}+\sqrt[3]{x_0^2})}=$$

$$=\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\,x_0}+\sqrt[3]{x_0^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\,x_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}$$

Άρα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\,x_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$

Συνεπώς $\boxed{(\sqrt[3]{x_0^2})'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

Αν x_0 είναι τυχαίο σημείο του R και $x\neq x_0$ ισχύει

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{\eta\mu 3x-\eta\mu 3x_0}{x-x_0}=\frac{2\eta\mu\frac{3(x-x_0)}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3(x+x_0)}{2}}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\eta\mu\frac{3(x-x_0)}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3(x+x_0)}{2}}{\frac{3(x-x_0)}{2}\,\frac{2}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}3\,\sigma\upsilon\nu\frac{3(x+x_0)}{2}$$

Άρα $g'(x_0)=3\sigma\upsilon\nu 3x_0$ οπότε $\boxed{(\eta\mu 3x)'=3\sigma\upsilon\nu 3x}$

Για $x_0\in\mathbb{R}$ και $x\neq x_0$ ισχύει

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{e^{2x}-e^{2x_0}}{x-x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{2x} - e^{2x_0}}{x - x_0} = e^{2x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{2(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \overset{x - x_0 = y}{=} e^{2x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{2y} - 1}{y}$$

Θέτουμε $e^{2y}-1=z$ και έχουμε

$$h'(x_0) = e^{2x_0} \lim_{z \to 0} \frac{2z}{\ln(z+1)} = ze^{2x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\ln(z+1)^{1/2}}$$

$$\boxed{(e^{2x})' = 2e^{2x}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται συνάρτηση $\mathbf{f}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - ημx| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ στο σημείο $A(0, f(0))$.

Λύση

Είναι $y-f(0) = f'(0)x$

αλλά $f(0) = 0$ διότι για $x = 0$

η αρχική σχέση γίνεται

$$|f(0) - ημ0| \leq 0 \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Για $x \neq 0$ $\quad \frac{|f(x) - ημx|}{|x|} \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x) - ημx}{x} \leq |x| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ημx}{x} - |x| \leq \frac{f(x)}{x} < |x| + \frac{ημx}{x}$$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 = f'(0)$

δηλαδή $y = x$.

ΘΕΜΑ 3

Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\alpha^{x^x} - \alpha^{\alpha^\alpha}}{x - \alpha}$, $\alpha > 0$

Λύση

Θέτουμε $\alpha^{x^x} = f(x)$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$

Όμως $f'(x) = \alpha^{x^x} \ln\alpha\,(x^x)' = \alpha^{x^x} \ln\alpha\,(x^x x' \ln x + x\,x^{x-1} x')$

$f'(x) = \alpha^{x^x} \ln\alpha\,(x^x \ln x + x\,x^{x-1})$

Συνεπώς $f'(\alpha) = \alpha^{\alpha^\alpha} \ln\alpha\,(\alpha^\alpha \ln\alpha + \alpha\,\alpha^{\alpha-1})$

$f'(\alpha) = \alpha^{\alpha^\alpha} \ln\alpha\,\alpha^\alpha(\ln\alpha + 1)$

Άρα $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\alpha^{x^x} - \alpha^{\alpha^\alpha}}{x - \alpha} = \alpha^{\alpha^\alpha} \ln\alpha\,\alpha^\alpha(\ln\alpha + 1)$

ΘΕΜΑ 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση **f:R→R** με $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ e^{-1/x} & , x > 0 \end{cases}$

είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο **R**.

Λύση

Για $x<0$ η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) = 0$

Για $x>0$ η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2} e^{-1/x}\right)' = \frac{\left(e^{-1/x}\right)' x^2 - e^{-1/x} + 2x}{x^4} = \frac{\frac{1}{x^2} e^{-1/x} x^2 - 2x e^{-1/x}}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-1/x}(1-2x)}{x^4}$$

…α εξετάσουμε αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο x=0.

$$f'_{\alpha}(0) = 0 \quad , \quad f'_{\delta}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 e^{1/x}}$$

…α να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x}$ θέτουμε $\frac{1}{x} = \nu$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^\nu}{\nu^2} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^{\nu+1} - e^\nu}{(\nu+1)^2 - \nu^2} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^\nu (e-1)}{\nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2} =$$

$$= (e-1) \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^\nu}{2\nu + 1} = (e-1) \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^{\nu+1} - e^\nu}{2(\nu+1) + 1 - 2\nu - 1} =$$

$$= (e-1) \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^\nu (e-1)}{2\nu + 2 - 2\nu} = (e-1)^2 \lim_{\nu \to \infty} \frac{e^\nu}{2} = +\infty$$

…ρα $f'_{\delta}(0) = 0$

…πότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x=0 και f΄(0)=0.

…είσης έχουμε

$$f''_{\alpha}(0) = 0 \quad \text{και} \quad f''_{\delta}(0) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} \frac{1-2x}{x^4} = 0$$

…ρα η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο x=0 και f΄΄(0)=0, οπότε f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R.

ΘΕΜΑ 5

…α εξετάσετε αν η συνάρτηση **f:R→R** με **f(x) = |x| ημx** είναι …ραγωγίσιμη στο σημείο **x=0**.

Λύση

$$f(x)=\begin{cases} x\,\eta\mu x &, \alpha\nu\ x>0 \\ 0 &, \alpha\nu\ x=0 \\ -x\,\eta\mu x &, \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$$

$$f_\alpha'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\,\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-\eta\mu x)=0$$

$$f_\delta'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\,\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$$

Άρα $f_\alpha'(0)=f_\delta'(0)=0$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x=0 και $f'(0)=0$.

ΘΕΜΑ 6

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων: (i) $\mathbf{f(x)=\sqrt[4]{2x^3-6}}$

(ii) $\mathbf{f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}}$ (iv) $\mathbf{f(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|}$

(iii) $\mathbf{f(x)=\ln\eta\mu 3x}$ (v) $\mathbf{f(x)=\ln\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}$

Λύση

$$f'(x)=\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{\alpha^2+x^2}}}{(\sqrt{\alpha^2+x^2})}=\frac{\dfrac{\alpha^2+x^2-x^2}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}=\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+x^2)}$$

(iii) $$f'(x)=\frac{(\eta\mu 3x)'}{\eta\mu 3x}=\frac{3\,\sigma\upsilon\nu\,3x}{\eta\mu\,3x}=3\,\sigma\varphi\,3x$$

(iv) $$f'(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+\alpha})'}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{1+\dfrac{(x^2+\alpha)'}{2\sqrt{x^2+\alpha}}}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+\alpha}+x}{(x+\sqrt{x^2+\alpha})\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

(v) $$f'(x)=\frac{\left[\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right]'}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\dfrac{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}}=\frac{1}{2\,\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

ΘΕΜΑ 7

Έστω $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Δεδομένου ότι $f'(0)=2$, να αποδείξετε ότι:

(i) $f(\nu x)=\nu e^{(\nu-1)x}f(x)$ για κάθε $\nu\in N$.

(ii) $f(0)=0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

(iv) $f'(x)=f(x)+2e^{x}$ για κάθε $x\in R$.

Λύση

(i) Για $\nu=1$ έχουμε $f(x)=f(x)$ αληθής.
Δεχόμεθα ότι ισχύει για $\nu=k$ δηλαδή
$f(kx)=ke^{(k-1)x}f(x)$ για κάθε $x\in R$ με $k\in N$
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=k+1$ δηλαδή
$f((k+1)x)=(k+1)e^{kx}f(x)$ για κάθε $x\in R$
$\Leftrightarrow$ $f(kx+x)=ke^{kx}f(x)+e^{kx}f(x)$ για κάθε $x\in R$
$\Leftrightarrow$ $e^{x}f(kx)+e^{kx}f(x)=ke^{kx}f(x)+e^{kx}f(x)$, $x\in R$
$\Leftrightarrow$ $f(kx)=ke^{(k-1)x}f(x)$ για κάθε $x\in R$ η οποία ισχύει

(ii) Για $x=y=0$ έχουμε $f(0)=0$

(iii) Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

(iv) Έχουμε: $f'(x+y)=e^{y}f(x)+e^{x}f'(y)$, $x,y\in R$

Για $y=0$ προκύπτει:
$f'(x)=f(x)+2e^{x}$
για κάθε $x\in R$ που είναι και το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 8

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού **E** της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}\ .$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία στα οποία η **f** δεν είναι παραγωγίσιμη.

Λύση

Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+8 \geq 6\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+16x+64-36x+36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-20x+100 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-10)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Άρα η f ορίζεται εφόσον $x \geq 1$ οπότε $E = [1,\infty)$

Η f γράφεται $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3|$

$$\begin{cases} 3-\sqrt{x-1}\ , & 1 \leq x \leq 10 \\ \sqrt{x-1}-1\ , & x > 10 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(1,10)$ και $(10,\infty)$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x=1$ και $x=10$.

$$f'_\delta(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3-\sqrt{x-1}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\sqrt{x-1}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\sqrt{x-1}} \ \dots$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x=1.

$$f'_\alpha(10)=\lim_{x\to 10^-}\frac{f(x)-f(10)}{x-10}=\lim_{x\to 10^-}\frac{3-\sqrt{x-1}-0}{x-10}=\lim_{x\to 10^-}\frac{3-\sqrt{x-1}}{x-10}=$$

$$=\lim_{x\to 10^-}\frac{(3-\sqrt{x-1})(3+\sqrt{x-1})}{(3+\sqrt{x-1})(x-10)}=\lim_{x\to 10^-}\frac{9-x+1}{(x-10)(3+\sqrt{x-1})}=$$

$$=-\lim_{x\to 10^-}\frac{x-10}{(x-10)(3+\sqrt{x-1})}=-\frac{1}{6}$$

$$f'_\delta(10)=\lim_{x\to 10^+}\frac{f(x)-f(10)}{x-10}=\lim_{x\to 10^+}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10^+}\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\frac{1}{6}$$

$$f'_\alpha(10)\neq f'_\delta(10)$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=10.

ΘΕΜΑ 9

Να βρεθεί η παράγωγος **ν** τάξης της συνάρτησης:

$$\mathbf{f(x)=\frac{1+x}{1-x}}.$$

Λύση

$$f(x)=\frac{-(1-x)+2}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}=-1+2(1-x)^{-1}$$

$$f'(x)=2(1-x)^{-2}\quad,\quad f''(x)=2\cdot 2\cdot(1-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x)=2\cdot 2\cdot 3\cdot(1-x)^{-4}\quad,\quad f^{(4)}(x)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(1-x)^{-5}$$

Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής θα αποδείξουμε ότι

$$f^{(\nu)}(x)=2\cdot\frac{\nu!}{(1-x)^{\nu+1}}\quad \text{για κάθε}\quad \nu\in N^*\quad (1)$$

- Για ν=1 η *(1)* αληθεύει.

• Έστω ότι η *(1)* αληθεύει για ν=k και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για ν=k+1, δηλαδή ότι

$$f^{(k+1)}(x)=2\cdot\frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

$$f^{(k+1)}(x)=\left(2\cdot\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)'=2\cdot k!\left[(1-x)^{-k-1}\right]'=2k!\,(k+1)\,(1-x)^{-k-2}$$

$$f^{(k+1)}(x)=2\,\frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

Άρα η *(1)* αληθεύει και για ν=k+1 οπότε αληθεύει για κάθε $\nu\in N^*$.

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις: $\mathbf{f_1(x)=\eta\mu x}$, $\mathbf{f_2(x)=\eta\mu 3x}$ και $\mathbf{f_3(x)=\eta\mu^3 x}$

(i) Να δειχθεί ότι $\mathbf{f_1^{(\nu)}(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)}$ και

$$\mathbf{f_2^{(\nu)}(x)=3^{\nu}\,\eta\mu\left(3x+\frac{\nu\pi}{2}\right)}$$

(ii) Να βρεθεί η $\mathbf{f_3^{(\nu)}(x)}$

Λύση

(i) $f_1'(x)=\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$f_1''(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι

$$f_1^{(\nu)}(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)\quad \text{για κάθε}\quad \nu\in N^*\quad (1)$$

- Για ν=1 η *(1)* αληθεύει
- Έστω ότι η *(1)* αληθεύει για ν=k και θα δείξουμε ότι αληθεύει για ν=k+1, δηλαδή ότι

$$f_1^{(k+1)}(x)=\eta\mu\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

$$f_1^{(k+1)}(x)=\left[\eta\mu\left(\frac{x+k\pi}{2}\right)\right]'=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+k\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_1^{(k+1)}(x)=\eta\mu\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Αρα η *(1)* αληθεύει και για ν=k+1 οπότε αληθεύει για κάθε $\nu\in N^*$.

$$f_2'(x)=3\,\sigma\upsilon\nu 3x=3\,\eta\mu\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_2''(x)=3^2\,\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=3^2\,\eta\mu^2\left(3x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=3^2\,\eta\mu\left(3x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι

$$f_1^{(\nu)}(x)=3^\nu\,\eta\mu\left(3x+\frac{\nu\pi}{2}\right)\quad \text{για κάθε } \nu\in N^* \quad (2)$$

- Για ν=1 η *(2)* αληθεύει
- Έστω ότι η *(2)* αληθεύει για ν=k και θα δείξουμε ότι αληθεύει για ν=k+1, δηλαδή ότι ισχύει

$$f_2^{(k+1)}(x)=3^{k+1}\,\eta\mu\left(3x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

$$f_2^{(k+1)}(x)=\left[3^k\,\eta\mu\left(3x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'=3^{k+1}\,\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{k\pi}{2}\right)=$$

$$=3^{k+1}\,\eta\mu\left(3x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=3^{k+1}\,\eta\mu\left(3x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Άρα η *(2)* αληθεύει και για ν=k+1 οπότε αληθεύει για κάθε $\nu\in N^*$.

(ii) $f(x)=\eta\mu^3(x)=\dfrac{3\,\eta\mu x}{4}-\dfrac{\eta\mu 3x}{4}=\dfrac{3}{4}f_1(x)-\dfrac{1}{4}f_2(x)$

Άρα $\quad f_3^{(\nu)}(x)=\dfrac{3}{4}f_1^{(\nu)}(x)-\dfrac{1}{4}f_2^{(\nu)}(x)$

$$f_3^{(\nu)}(x)=\frac{3}{4}\eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}3^\nu\,\eta\mu\left(3x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$$

ΘΕΜΑ 11

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}}$. Να δειχτεί ότι

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{(-1)^{\nu}\cdot 2\cdot \nu!}{(1+x)^{\nu+1}}$$

Λύση

$$f(x) = \frac{-(x+1)+2}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1} = -1 + 2\,(x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = -2\,(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2\cdot 2\,(x+1)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = -2\cdot 2\cdot 3\,(x+1)^{-4}$$

Θα δείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\frac{2\cdot \nu!}{(x+1)^{\nu+1}}, \quad \text{για κάθε} \quad \nu\in N^* \quad (1)$$

- Για ν=1 η *(1)* αληθεύει
- Έστω ότι η *(1)* αληθεύει για ν=k και θα δείξουμε ότι αληθεύει για ν=k+1, δηλαδή ότι

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\,2\,(k+1)!}{(x+1)^{k+2}}$$

$$f^{(k+1)}(x) = \left[\frac{(-1)^{k}\cdot 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}\right]' = (-1)^{k}\cdot 2\cdot k!\left[(1+x)^{-k+1}\right]' =$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot 2\,(k+1)\cdot k!\,(1+x)^{-k-2} = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2\,(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$

Άρα η *(2)* αληθεύει για ν=k+1 οπότε αληθεύει για κάθε $\nu\in N^*$.

ΘΕΜΑ 12

Να αποδειχθεί ότι αληθεύει η ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(-\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=$$

$$=4\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

Λύση

Θέτουμε $x=\alpha$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = (x+\beta+\gamma)^2+(-x+\beta+\gamma)^2+(x-\beta+\gamma)^2+(x+\beta-\gamma)^2-4(x^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$f'(x) = 2(x+\beta+\gamma)-2(-x+\beta+\gamma)+2(x-\beta+\gamma)+2(x+\beta-\gamma)-8x$$

$$f'(x) = 2x+2\beta+2\gamma+2x-2\beta-2\gamma+2x-2\beta+2\gamma+2x+2\beta-2\gamma-8x = 0$$

Αφού $f'(x)=0 \Rightarrow f(x) = c =$ σταθερός

Όμως $f(0) = (\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2-4\beta^2-4\gamma^2 =$

$$= 2\beta^2+2\gamma^2+4\beta\gamma+2\gamma^2+2\beta^2-4\beta\gamma-4\beta^2-4\gamma^2 = 0$$

Άρα $f(0) = 0$, οπότε $f(x) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$ οπότε έχουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(-\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

ΘΕΜΑ 13

Έστω η συνάρτηση f με:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^\nu}\,e^{-1/x^2}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Να δείξετε ότι $f'(0)=0$.

Λύση

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\nu+1} e^{1/x^2}}$$

Θέτουμε $\frac{1}{x^2} = y > 0$. Όταν $x \to 0$ έχουμε $y \to +\infty$

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\nu+1} e^{1/x^2}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^{\nu+1/2}}{e^y} = 0$

Συνεπώς $f'(0)=0$

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η **g** δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

$$g(\beta)=g'(\beta)=0$$

τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)\neq 0$.

Λύση

Έστω ότι: $g''(x) = 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Τότε $g'(x) = c$ (c: σταθερά) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Επειδή $g'(x) = c$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με συνεχή g' έπεται ότι: $c = g'(\beta) = 0$

Άρα $g'(x) = 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,

δηλαδή $g(x) = k$ (k: σταθερά) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αλλά για $x=\beta$, $g(\beta) = 0 = k$

οπότε $g(x) = 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, άτοπο

αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Επομένως υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) \neq 0$.

ΘΕΜΑ 15

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f:(0,\pi)\to R_+^*}$ αν ισχύει

$$\mathbf{f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x=f(x)\eta\mu x} \text{ για } \mathbf{x\in(0,\pi)}$$

με $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Λύση

Έχουμε $(f(x)\eta\mu x)'=f(x)\eta\mu x$

Θέτουμε $h(x)=f(x)\eta\mu x$. Έτσι παίρνουμε

$$h'(x)=h(x) \Rightarrow h(x)=ce^x \Leftrightarrow f(x)=\frac{c\,e^x}{\eta\mu x}$$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ προκύπτει $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{c\,e^{\pi/4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow c\cdot e^{\pi/4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}c^{-\pi/4}$

άρα $f(x)=\frac{1}{2}\,\frac{e^x}{e^{\pi/4}\eta\mu x}$

ΘΕΜΑ 16

Έστω $\mathbf{f,g:I\to R}$ και $\mathbf{\alpha\in I}$ τέτοιες, ώστε $\mathbf{f(\alpha)=g(\alpha)}$ και $\mathbf{f(x)+x<g(x)+\alpha}$, για κάθε $\mathbf{x\in I}$. Αν οι $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\boldsymbol{\alpha}$, αποδείξτε ότι $\mathbf{f'(\alpha)+1=g'(\alpha)}$.

Λύση

Έχουμε $\frac{f(x)-f(\alpha)+(x-\alpha)}{x-\alpha}<\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, για $x>\alpha$

και $\frac{f(x)-f(\alpha)+(x-\alpha)}{x-\alpha} \geq \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, για $x<\alpha$

Άρα $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)+(x-\alpha)}{x-\alpha} \leq \lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$

και $\lim\limits_{x \to \alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)+(x-\alpha)}{x-\alpha} \geq \lim\limits_{x \to \alpha^-} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$

δηλαδή $f'(\alpha)+1 \leq g'(\alpha)$ και $f'(\alpha)+1 \geq g'(\alpha)$

Συνεπώς $f'(\alpha)+1 = g'(\alpha)$

ΘΕΜΑ 17

Έστω $\mathbf{f{:}R \to R}$ που πληρεί τη σχέση $|\mathbf{f(\alpha)-f(b)}| \leq (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b})^2$, για κάθε $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι $\mathbf{f'(x)=0}$.

Λύση

Έστω x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Έστω $L = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Έχουμε $|f(\alpha)-f(b)| \leq (\alpha-b)^2 = |\alpha-b|^2$

ή $\left|\frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}\right| \leq |\alpha-b|$ για κάθε $\alpha, b \in R$

Συνεπώς $0 \leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq |x-x_0|$

και $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ οπότε $L=0$

Άρα δείξαμε ότι το L υπάρχει για κάθε $x_0 \in R$ και $f'(x_0)=0$, για κάθε $x_0 \in R$.

ΘΕΜΑ 18

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $\mathbf{f:R \to R}$ τέτοιες, ώστε $\mathbf{f(\alpha - x) = f'(x)}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$, όπου $\mathbf{\alpha \in R}$, σταθερά. Να εξεταστεί η περίπτωση $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}}$.

Λύση

Θέτουμε $\alpha\text{-}x = y$ και έχουμε $f(y) = f'(\alpha - y) = -f''(y)$

Άρα $f''(x) + f(x) = 0$

οπότε $f(x) = c_1\,\eta\mu\, x + c_2\,\sigma\upsilon\nu\, x$ *(1)* όπου $c_1, c_2 \in R$

Θα εξετάσουμε σε ποια περίπτωση η συνάρτηση *(1)* πληρεί τη δοσμένη εξίσωση

$$f(\alpha - x) - f'(x) = c_1\left[\eta\mu\,(\alpha - x) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + c_2\left[\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$

$$= c_1\, 2\,\eta\mu\frac{2\alpha - \pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} + c_2\, 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - 2x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi - 2\alpha}{4} =$$

$$= 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha + \pi - 4x}{4}\left[c_1\,\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c_2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha + \pi - 4x}{4}\left[c_1\,\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - c_2\,\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Άρα $c_1 = c_2$ και $f(x) = c(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

Αν $\alpha = \frac{\pi}{2}$ τότε η σχέση αληθεύει για κάθε $c_1, c_2 \in R$.

ΘΕΜΑ 19

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f(x)}$, $\mathbf{x \in R_+}$ με $\mathbf{f'(x) = \frac{1}{x}}$

για κάθε $\mathbf{x \in R_+}$ και $\mathbf{f(1)=0}$.

Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{f(xy)=f(x)+f(y)}$ για κάθε $\mathbf{x,y \in R_+}$

Λύση

Έστω ένας $x_0 \in R_+$, θα αποδείξουμε ότι:

$f(x_0x)=f(x)+f(x_0)$ για κάθε $x \in R_+$

Έχουμε $(f(x_0x))'=(x_0x)'f'(x_0x)=x_0\dfrac{1}{x_0\,x}=\dfrac{1}{x}$

επίσης $(f(x_0)+f(x))'=f'(x_0)+f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Ώστε $(f(x_0x))'=(f(x_0)+f(x))'$

Επομένως $f(x_0x)=f(x_0)+f(x)+c$

Για $x=1$ προκύπτει $f(x_0)=f(x_0)+f(1)+c \Rightarrow c=0$

Άρα $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y \in R_+$

ΘΕΜΑ 20

Στο επίπεδο **xoy** ένα σημείο διαγράφει την καμπύλη που ορίζεται από τις εξισώσεις $\mathbf{x=t^2-t-2}$ και $\mathbf{y=t^2+3t+2}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη στο σημείο **M**, για $\mathbf{t=1}$.

Λύση

Για $t=1$ έχουμε $M(-2,6)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο (x_0, y_0) είναι

$$y-y_0=\frac{dy}{dx}(x-x_0)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+3}{2t-1} \qquad y'(1)=\frac{5}{1}=5$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y-6=5\,(x+2)$

δηλαδή $5x-y+16=0$

ΘΕΜΑ 21

Να δείξετε ότι οι καμπύλες: $(c_1): f(x) = x\,ημx + συνx + x$ και $(c_2): g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ εφάπτονται στο σημείο $P(0,1)$.

Λύση

Οι καμπύλες εφάπτονται στο σημείο P όταν οι εφαπτόμενες των καμπυλών στο P ταυτίζονται.
Επειδή $f(0)=1$ και $g(0)=1$ προκύπτει ότι το σημείο $P(0,1)$ είναι σημείο των (c_1) και (c_2).

$f'(x) = ημx + x\,συνx - ημx + 1 = x\,συνx + 1$

$f'(0)=1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της (c_1) στο $P(0,1)$ είναι

$y-1 = x$ *(1)*

$$g'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$g'(0) = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της (c_2) στο $P(0,1)$ είναι

$y-1 = x$ *(2)*

Αφού οι εξισώσεις *(1)* και *(2)* ταυτίζονται προκύπτει ότι οι (c_1) και (c_2) εφάπτονται στο $P(0,1)$.

ΘΕΜΑ 22

Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη (c) με εξίσωση: $x^2\sqrt{y} + ημ(2y - x) - 4 = 0$ στο σημείο $M(2,1)$.

Λύση

Έχουμε $4\sqrt{1}+ημ0-4=0$ οπότε το Μ ανήκει στην καμπύλη (c),
Παραγωγίζουμε τη σχέση $x^2\sqrt{y}+ημ(2y-x)-4=0$ και βρίσκουμε

$$2x\sqrt{y}+x^2\frac{y'}{2\sqrt{y}}+(2y'-1)\,συν(2y-x)=0 \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της (c) σε ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι της μορφής $y-y_0=y_0'(x-x_0)$

Η *(1)* γράφεται για (x_0, y_0) ως εξής

$$2x_0\sqrt{y_0}+x_0^2\frac{y_0'}{2\sqrt{y_0}}+(2y_0'-1)\,συν(2y_0-x_0)=0$$

Για $(x_0, y_0)=(2,1)$ έχουμε

$$4+\frac{4}{2}y_0'+(2y_0'-1)\,συν(0)=0 \quad ή \quad 4+2y_0'+2y_0'-1=0 \quad και \quad y_0'=-\frac{3}{4}$$

Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$y-1=-\frac{3}{4}(x-2) \quad ή \quad 3x+4y-10=0$$

ΘΕΜΑ 23

Δίνονται οι συναρτήσεις **$f(x)=e^x$** και **$g(x)=e^xημx$**. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των **f** και **g** έχουν κοινά σημεία και ακόμα ότι σε κάθε κοινό σημείο τους υπάρχει μια κοινή εφαπτομένη.

Λύση

Οι τετμημένες των κοινών σημείων δίνονται από την εξίσωση

$$e^x = e^xημx \quad ή \quad e^x(ημx-1)=0 \Rightarrow ημx=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=(4k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k\in z$$

$$f'(x)=e^x \quad και \quad g'(x)=e^x(ημx+συνx)$$

Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των f και g στα σημεία

$x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in z$ είναι:

$$f'\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\right]=e^{(4k+1)\pi/2}$$

$$g'\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\right]=e^{(4k+1)\pi/2}\left[\eta\mu\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=e^{(4k+1)\pi/2}$$

Άρα $f'\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\right]=g'\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

οπότε οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής των f και g είναι κοινές, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g εφάπτονται στα σημεία αυτά.

ΘΕΜΑ 24

Από την οικογένεια καμπυλών $\mathbf{y=\alpha^x}$ $(\alpha>1)$ να βρεθούν εκείνες που δέχονται μια εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης α, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Μια εφαπτομένη στην καμπύλη $y=\alpha^x$ στο σημείο $M(x_0, y_0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης το $y'(x_0)=\alpha^{x_0}\ln\alpha$.

Συνεπώς πρέπει (1)

$$\alpha^{x_0}\ln\alpha=\alpha \quad , \quad \alpha^{x_0}=\frac{\alpha}{\ln\alpha} \quad ή \quad x_0\ln\alpha=\ln\frac{\alpha}{\ln\alpha}$$

Άρα $x_0=\dfrac{\ln\frac{\alpha}{\ln\alpha}}{\ln\alpha}$ και $y(x_0)=\dfrac{\alpha}{\ln\alpha}$

Συνεπώς το σημείο επαφής είναι $M\left(\dfrac{\ln\dfrac{\alpha}{\ln\alpha}}{\ln\alpha}, \dfrac{\alpha}{\ln\alpha}\right)$

Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση εφαπτομένης $y=\alpha x$, οπότε έχουμε

$$\frac{\alpha}{\ln\alpha}=\alpha\,\frac{\ln\dfrac{\alpha}{\ln\alpha}}{\ln\alpha}$$

Αφού $\alpha>1$ προκύπτει ότι $\ln\left(\dfrac{\alpha}{\ln\alpha}\right)=1$ ή $\dfrac{\alpha}{\ln\alpha}=e$ ή $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}=\dfrac{1}{e}$ ή

ή $\ln\alpha^{1/\alpha}=\ln e^{1/e}$ και $\alpha^{1/\alpha}=e^{1/e}$ οπότε $\alpha=e$

Επομένως οι ζητούμενες καμπύλες είναι $y=e^x$.

ΘΕΜΑ 25

Έστω **f** παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\mathbf{f(0)=1}$ και $\mathbf{f(x)\leq 1998^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathbf{A(0,f(0))}$.

Λύση

Η εξίσωση εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-1=f'(0)x$

Για να υπολογίσουμε το $f'(0)$ θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση

$h(x)=f(x)-1998^x\leq 0=h(0)$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat $h'(0)=0$,

άρα $f'(0)-\ln 1998=0 \Rightarrow f'(0)=\ln 1998$

Επομένως $y=x\ln 1998+1$

ΘΕΜΑ 26

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{y = \dfrac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}}$. Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0} \quad (1)$$

Λύση

Έχουμε $y' = \dfrac{(x-2)'\sqrt{1+x^2} - (x-2)(\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2}$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2x(x-2)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1+x^2 - x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} =$$

$$= \frac{1+x^2-x^2+2x}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

Άρα $(1+x^2)\,y' = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ *(2)*

Αν παραγωγίσουμε τη *(2)* βρίσκουμε

$$(1+x^2)\,y'' + 2x\,y' = \frac{2\sqrt{x^2+1} - (2x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$(1+x^2)\,y'' + 2x\,y' = \frac{2x^2+2-x(2x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Δηλαδή $(1+x^2)^2 y'' + 2x(x^2+1)\,y' = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2+1}}$

ή $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)\,y' + y = 0$

Άρα η *(1)* ισχύει.

ΘΕΜΑ 27

Να δειχθεί ότι αν $\mathbf{x+y^3+k=\alpha\cdot e^x}$ τότε ισχύει η σχέση:
$\mathbf{3y^2\cdot y'=x+y^3+k-1}$

Λύση

Έχουμε $1+3y^2\cdot y'=\alpha\cdot e^x$
Όμως $\alpha\cdot e^x=x+y^3+k$ οπότε $3y^2\cdot y'=\alpha\cdot e^x-1$ και
$3y^2\cdot y'=x+y^3+k-1$

ΘΕΜΑ 28

Να δείξετε ότι αν $\mathbf{x^2+y^2-2\alpha x=0}$ τότε είναι

$$\mathbf{y^2-x^2-2xyy'=0}$$

Λύση

Έχουμε $2x+2yy'-2\alpha=0 \;\Rightarrow\; 2yy'=2\alpha-2x \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; 2xyy'=2\alpha x-2x^2=-x^2-x^2+2\alpha x=-x^2-(x^2-2\alpha x)=$
$=-x^2-(-y^2)=y^2-x^2$
Συνεπώς $y^2-x^2-2xyy'=0$

ΘΕΜΑ 29

Να δειχθεί ότι αν $\mathbf{2x=y^2-\alpha y^3}$ *(1)* τότε $\mathbf{2y+(y^2-6x)\,y'=0}$ *(2)*

Λύση

Θεωρούμε το x συνάρτηση του y και έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = 1 : x' = \frac{1}{x'}$$

Η *(2)* γράφεται $2y + \frac{1}{x'}(y^2 - 6x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2yx' + y^2 - 6x = 0 \quad$ *(3)*

Παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε

$$2x' = 2y - 3y^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x' = y - \frac{3}{2}y^2\alpha$$

$$2y\left(y - \frac{3}{2}\alpha y^2\right) + y^2 - 6x = 2y^2 - 3\alpha y^3 + y^2 - 3\,(y^2 - \alpha\, y^3) =$$

$$= 2y^2 - 3\alpha y^3 + y^2 - 3y^2 + 3\alpha\, y^3 = 0$$

Άρα η *(3)* ισχύει οπότε ισχύει και η *(2)*.

ΘΕΜΑ 30

Να δειχθεί ότι αν $\mathbf{x = 1 + y^2 + \alpha\sqrt{1 + y^2}}$ *(1)* τότε:

$$\mathbf{1 + y^2 = (xy + y + y^3)\, y'} \quad (2)$$

Λύση

Θεωρούμε το x συνάρτηση του y και έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = 1 : x' = \frac{1}{x'}$$

Παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε

$$x' = 2y + \alpha\frac{2y}{2\sqrt{1 + y^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x' = 2y + \frac{y\alpha}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Η *(2)* γράφεται ισοδύναμα

$$1 + y^2 = \frac{xy + y + y^3}{x'} \quad \Leftrightarrow \quad x'(1 + y^2) = xy + y + y^3$$

$$\left(2y+\frac{\alpha y}{\sqrt{1+y^2}}\right)(1+y^2)-xy-y-y^3=$$

$$=\left(2y+\frac{\alpha y}{\sqrt{1+y^2}}\right)(1+y^2)-y\,(1+y^2+\alpha\sqrt{1+y^2})-y-y^3=$$

$$=2y+2y^3+\frac{\alpha y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{\alpha y^3}{\sqrt{1+y^2}}-y-y^3-\alpha y\sqrt{1+y^2}-y-y^3=$$

$$=\frac{\alpha y\,(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}}-\alpha y\sqrt{y^2+1}=\alpha y\sqrt{y^2+1}-\alpha y\sqrt{y^2+1}=0$$

Άρα η *(2)* αληθεύει.

ΘΕΜΑ 31

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ και $\mathbf{\nu}\in\mathbf{N}^*$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\mathbf{(x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^\nu)\,(x-1)^2=}$$

$$\mathbf{=\ \nu\,x^{\nu+2}-(\nu+1)\,x^{\nu+1}+x}$$

Λύση

$$(x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^\nu)\,(x-1)^2=x\,(1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1})\,(x-1)^2=$$

$$=x\,(x-1)^2\frac{d}{dx}(x+x^2+\ldots+x^\nu)=x\,(x-1)^2\frac{d}{dx}\left(x\frac{x^\nu-1}{x-1}\right)=$$

$$x\,(x-1)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\nu+1}-x}{x-1}\right)=x\,(x-1)^2\frac{(x^{\nu+1}-x)'\,(x-1)-(x^{\nu+1}-x)\,(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{x\,(x-1)^2}{(x-1)^2}\left[((\nu+1)\,x^\nu-1)\,(x-1)-x^{\nu+1}+x\right]=$$

$$x\left[(\nu+1)\,x^{\nu+1}-(\nu+1)\,x^\nu-x+1-x^{\nu+1}+x\right]=$$

$$=x\left[\nu\,x^{\nu+1}-(\nu+1)\,x^\nu+1\right]=\nu\,x^{\nu+2}-(\nu+1)\,x^{\nu+1}+x$$

Συνεπώς $(x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu\,x^\nu)\,(x-1)^2=\nu\,x^{\nu+2}-(\nu+1)\,x^{\nu+1}+x$

ΘΕΜΑ 32

Αν $P_\nu'(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, αποδείξτε ότι όταν η εξίσωση $P_\nu(x) = 0$ έχει όλες τις ρίζες πραγματικές τότε: $P_\nu(x)\, P_\nu''(x) - P_\nu'^{\,2}(x) < 0$ για κάθε $x \in R$

Λύση

$$P_\nu(x) = \alpha\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\nu)$$

$$P_\nu'(x) = \alpha\,[(x - x_2)\ldots(x - x_\nu) + (x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_\nu) + $$
$$+ (x - x_1)\ldots(x - x_{\nu-1})]$$

$$\frac{P_\nu'(x)}{P_\nu(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_\nu}$$

$$\left(\frac{P_\nu'(x)}{P_\nu(x)}\right)' = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \ldots - \frac{1}{(x - x_\nu)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P_\nu''(x)\, P_\nu(x) - P_\nu'(x)\, P_\nu'(x)}{P_\nu^2(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$P_\nu(x)\, P_\nu''(x) - [P_\nu'(x)]^2 < 0$$

ΘΕΜΑ 33

Έστω $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha < \beta$ και $f : [\alpha, \beta] \to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(x) \in R^*$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \in R$ και $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) \in R$, αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = 2\,[\sigma\varphi(\alpha - c) + \sigma\varphi\,(\beta - c)]$$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$, με $g(x) = f(x)\,\eta\mu^2(\alpha - x)\,\eta\mu^2(\beta - x)$

$g(\alpha) = g(\beta) = 0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x)\,\eta\mu^2(\alpha - x)\,\eta\mu^2(\beta - x) =$$

$$= \lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot 0 = 0 = g(\alpha)$$

$$\lim_{x\to\beta} g(x) = \lim_{x\to\beta} f(x)\cdot 0 = g(\beta)$$

Συνεπώς η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x)\,\eta\mu^2(\alpha - x)\,\eta\mu^2(\beta - x) - f(x)\,2\,\eta\mu\,(\alpha - x)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - x)\,\eta\mu^2(\beta - x) -$$
$$- 2\,\eta\mu\,(\beta - x)\,\sigma\upsilon\nu\,(\beta - x)\,f(x)\,\eta\mu^2(\alpha - x)$$

Άρα

$$f'(c)\,\eta\mu^2(\alpha - c)\,\eta\mu^2(\beta - c) = 2\,[\,f(c)\,\eta\mu\,(\alpha - c)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - c)\,\eta\mu^2(\beta - c) +$$
$$+ f(c)\,\eta\mu\,(\beta - c)\,\sigma\upsilon\nu\,(\beta - c)\,\eta\mu^2(\alpha - c)$$

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = 2\left[\frac{\eta\mu\,(\alpha - c)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - c)\,\eta\mu^2(\beta - c)}{\eta\mu^2(\alpha - c)\,\eta\mu^2(\beta - c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta\mu\,(\beta - c)\,\sigma\upsilon\nu\,(\beta - c)\,\eta\mu^2(\alpha - c)}{\eta\mu^2(\alpha - c)\,\eta\mu^2(\beta - c)}\right]$$

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = 2\,[\sigma\varphi\,(\alpha - c) + \sigma\varphi\,(\beta - c)]$$

ΘΕΜΑ 34

Έστω $\mathbf{f: [0,1] \to R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ συνεχής και αύξουσα στο $\mathbf{[0,1]}$. Αν $\mathbf{f(0)=f(1)=0}$, αποδείξτε ότι $\mathbf{f(x)\le 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in [0,1]}$.

Λύση

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)=0$

Αν $x>c$ είναι $f'(x) \ge f'(c) = 0$

Αν $x<0$ είναι $f'(x) \le f'(c) = 0$

x	0		c		1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	$f(c)$	↗	

Άρα η f είναι φθίνουσα στο $(0,c)$ και αύξουσα στο $(c,1)$ οπότε $f(x) \le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

ΘΕΜΑ 35

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f: [\alpha,\beta] \to [1,\infty]}$ συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ τέτοια, ώστε $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε:

$$f'(c)=\frac{4\,c\,f(c)\ln f(c)}{1+\ln f(c)}$$

Λύση

Έστω $F(x)=\dfrac{f(x)\ln f(x)}{e^{2x^2}}$, $x\in[\alpha,\beta]$

$$F(\alpha)=\frac{f(\alpha)\ln f(\alpha)}{e^{2\alpha^2}}=0$$

$$F(\beta)=\frac{f(\beta)\ln f(\beta)}{e^{2\beta^2}}=0$$

Άρα βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $F'(c)=0$.

Όμως $F'(x)=\dfrac{[f(x)\ln f(x)]'\,e^{2x^2}-f(x)\ln f(x)\,(e^{2x^2})'}{e^{4x^2}}=$

$$=\frac{\left[f'(x)\ln f(x)+f(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]e^{2x^2}-4x\,f(x)\ln f(x)\,e^{2x^2}}{e^{4x^2}}$$

Άρα υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(c)\ln f(c)+f'(c)=4c\,f(c)\ln f(c)\ \Leftrightarrow$$

$$f'(c)=\frac{4c\,f(c)\ln f(c)}{1+\ln f(c)}$$

ΘΕΜΑ 36

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με τις ιδιότητες $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)}$ και $\mathbf{f'(\alpha)=f'(\beta)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f'''(x_0)=0}$.

Λύση

Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)$, βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)=0$.

Εφαρμόζουμε το θ. Rolle για την f' στα διαστήματα $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1\in(\alpha,c)$ και $x_2\in(c,\beta)$ τέτοιοι, ώστε $f''(x_1)=0$ και $f''(x_2)=0$.
Εφαρμόζουμε το θ. Rolle για την f'' στο διάστημα $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'''(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ 37

Έστω $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\rightarrow R}$ δυο συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες που μηδενίζονται στα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0}$

Λύση

Έστω $\varphi(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f(x)g''(x) = \\ &= f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)\end{aligned}$$

Άρα $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi) = 0$

ΘΕΜΑ 38

Αν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ έχουν την ιδιότητα ότι $\mathbf{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0}$ σε ένα διάστημα $\mathbf{I}$, αποδείξτε ότι μεταξύ δυο πραγματικών ριζών της $\mathbf{f}$ βρίσκεται τουλάχιστον μια ρίζα της $\mathbf{g}$ και αντιστρόφως.

Λύση

Έστω x_1, x_2 δυο ρίζες της f. Έχουμε $g(x_1)\neq 0$ και $g(x_2)\neq 0$.

Έστω ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $h:[x_1,x_2]\to R$ με $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[x_1,x_2]$, $h(x_1)=h(x_2)=0$

Άρα βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(c)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(c)\,g(c)-f(c)\,g'(c)}{g^2(c)}=0 \Leftrightarrow f'(c)g(c)-f(c)\,g'(c)=0 \quad (\text{άτοπο})$$

Άρα η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (x_1,x_2).

Όμοια εργαζόμαστε για να αποδείξουμε το αντίστροφο.

ΘΕΜΑ 39

Έστω $\mathbf{f:(\alpha,\beta)\to R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν στη γραφική παράσταση της **f** υπάρχουν **4** διακεκριμένα σημεία που βρίσκονται επάνω σε μια παραβολή $\mathbf{P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f'''(c)=0}$.

Λύση

Έστω $x_1<x_2<x_3<x_4$ οι τετμημένες των σημείων και $\alpha x^2+\beta x+\gamma=P(x)$ η παραβολή στην οποία βρίσκονται τα σημεία.

Έστω $g(x)=f(x)-P(x)$, όπου $x\in(\alpha,\beta)$

$g(x_1)=f(x_1)-P(x_1)=0$, $g(x_2)=0$, $g(x_3)=0$, $g(x_4)=0$

Άρα βάσει του Θ. Rolle υπάρχουν $c_1\in(x_1,x_2)$, $c_2\in(x_2,x_3)$ και $c_3\in(x_3,x_4)$ τέτοιοι, ώστε $g'(c_1)=g'(c_2)=g'(c_3)=0$.

Βάσει του Θ. Rolle υπάρχουν $c_1'\in(c_1,c_2)$ και $c_2'\in(c_2,c_3)$ τέτοιοι, ώστε $g''(c_1')=g''(c_2')=0$,

Βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(c_1',c_2')\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε $g'''(c)=0 \Leftrightarrow f'''(c)=P'''(c)=0$, διότι $P'''(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 40

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ και $f, g, h: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο (α, β) οι οποίες δεν έχουν ρίζες στο (α, β). Η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$ και οι g και h είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $g(\alpha) = g(\beta) = h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f'(c)}{f(c)} + \dfrac{g'(c)}{g(c)} + \dfrac{h'(c)}{h(c)} = 0$

Λύση

Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο, ώστε $|f(x)| < M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Άρα

$$\lim_{x \to \alpha} |f(x)\, g(x)\, h(x)| \leq M \lim_{x \to \alpha} |g(x)| \lim_{x \to \alpha} |h(x)| = M\, |g(\alpha)|\, |h(\alpha)| = 0$$

Όμοια $\lim\limits_{x \to \beta} |f(x)\, g(x)\, h(x)| = 0$

Επειδή $(f\, g\, h)(\alpha) = (f\, g\, h)(\beta) = 0$

προκύπτει ότι η συνάρτηση $(f \cdot g \cdot h)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$(f \cdot g \cdot h)'(c) = 0$$

Όμως $(f \cdot g \cdot h)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ οπότε

$$\frac{(f \cdot g \cdot h)'(c)}{(f \cdot g \cdot h)(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(c)\, h(c)\, g(c) + f(c) g'(c)\, h(c) + f(c)\, g(c)\, h'(c)}{f(c)\, g(c)\, h(c)} = 0$$

$$\frac{f'(c)}{f(c)} + \frac{g'(c)}{g(c)} + \frac{h'(c)}{h(c)} = 0$$

ΘΕΜΑ 41

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,b]\to R}$ παραγωγίσιμη στο (α,b). Αν $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,b)$ να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιος ώστε: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{1}{\alpha-\xi}+\dfrac{1}{b-\xi}$

Λύση

Έστω $g:R\to R$ με $g(x)=f(x)(x-\alpha)(x-b)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,b) $g(\alpha)=g(b)=0$

Αποδεικνύεται εύκολο ότι η g είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο (α,b) και έχουμε $\exists\ \xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$

Όμως $g'(x)=f'(x)(x-\alpha)(x-b)+f(x)[(x-\alpha)(x-b)]'=$

$= f'(x)(x-\alpha)(x-b)+f(x)[(x-b)+(x-\alpha)]$

Άρα $g'(\xi)=f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-b)+f(\xi)[(\xi-b)+(\xi-\alpha)]$

Όμως $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-b)+f(\xi)[(\xi-b)+(\xi-\alpha)]=0 \Rightarrow$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{(b-\xi)+(\alpha-\xi)}{(\alpha-\xi)(b-\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{b-\xi}$$

Άρα $\exists\ \xi\in(\alpha,b)$ τέτοιος, ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{b-\xi}$$

ΘΕΜΑ 42

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$ τέτοια, ώστε f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{R}$ και $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\in R$. Αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

Λύση

΄Εστω ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Θεωρούμε $\alpha>0$, σταθερό. Από το Θ.Μ.Τ. για κάθε $x\in R$ υπάρχει $\varepsilon_x\in(x,x+\alpha)$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}=f'(\varepsilon_x)$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$f'(x) < f'(\varepsilon_x) < f'(x+\alpha)\ ,\quad \text{για κάθε } x\in R$$

Άρα $\quad f'(x)<\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}<f'(x+\alpha)\quad (1)$

Θέτουμε στημ *(1)* $x\to x-\alpha$ και έχουμε

$$f'(x-\alpha)<\frac{f(x)-f(x-\alpha)}{\alpha}<f'(x)\ ,\quad \text{για κάθε } x\in R$$

Συνεπώς $\quad \dfrac{f(x)-f(x-\alpha)}{\alpha}<f'(x)<\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$

Όμως $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x-\alpha)}{\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}=\dfrac{A-A}{\alpha}=0$

Άρα $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

ΘΕΜΑ 43

΄Εστω $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι μεταξύ δυο ριζών της εξίσωσης $\mathbf{f(x)=0}$ υπάρχει μια ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{f'(x)+f(x)g'(x)=0}$.

Λύση

΄Εστω $h:[\alpha,\beta]\to R$ με $h(x)=f(x)e^{g(x)}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ καί οι ρίζες των h και f είναι ίδιες.

$$h'(x)=f'(x)\,e^{g(x)}+f(x)\,g'(x)\,e^{g(x)}=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$$

Μεταξύ δύο ριζών της h υπάρχει c τέτοιο, ώστε

$h'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)+f(c)g'(c) = 0$

Άρα μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μία ρίζα της $f'(x)+f(x)g'(x)=0$.

ΘΕΜΑ 44

Έστω $\mathbf{f: [\alpha, \beta] \to R}$, $(\alpha<\beta)$ με $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $h(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$, $x\in[\alpha,\beta]$ και $g(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$, $x\in[\alpha,\beta]$,να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$\frac{\eta\mu\alpha f(\beta) - \eta\mu\beta f(\alpha)}{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta} = f(\xi) - f'(\xi)\,\varepsilon\varphi\xi$$

Λύση

Επειδή για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει το Θ.Μ.Τ. έχουμε

$$g'(\xi) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu^2\xi}, \quad h'(\xi) = -\frac{f'(\xi)\,\eta\mu\xi - f(\xi)\,\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu^2\xi}, \quad \xi\in(\alpha,\beta)$$

αλλά $(\beta-\alpha)\,g'(\xi) = \frac{1}{\eta\mu\beta} - \frac{1}{\eta\mu\alpha}$, $(\beta-\alpha)\,h'(\xi) = \frac{f(\beta)}{\eta\mu\beta} - \frac{f(\alpha)}{\eta\mu\alpha}$

Άρα $$\frac{h'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(\beta)}{\eta\mu\beta} - \frac{f(\alpha)}{\eta\mu\alpha}}{\frac{1}{\eta\mu\beta} - \frac{1}{\eta\mu\alpha}} = \frac{\frac{f'(\xi)\,\eta\mu\xi - f(\xi)\,\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu^2\xi}}{-\frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu^2\xi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha\, f(\beta) - \eta\mu\beta\, f(\alpha)}{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta} = f(\xi) - f'(\xi)\,\varepsilon\varphi\xi$$

ΘΕΜΑ 45

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ γνησίως μονότονη. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ υπάρχει $\mathbf{x_0\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιος ώστε: $\mathbf{f'(c)=\dfrac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0}}$ ή $\mathbf{f'(c)=\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}}$

Λύση

Έστω $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to R$ με

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x} & ,\ x\in(\alpha,\beta]\\ f'(\alpha) & ,\ x=\alpha\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} & ,\ x\in[\alpha,\beta)\\ f'(\beta) & ,\ x=\beta\end{cases}$$

Οι φ και ψ είναι συνεχείς και $\varphi(\beta)=\psi(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$

Έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε $\varphi(\alpha)=f'(\alpha)<f'(c)<f'(\beta)=\psi(\beta)$

Αν *(1)* $\varphi(\beta)\geq f'(c)$ τότε $\varphi(\alpha)<f'(c)<\varphi(\beta)$

οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=f'(c)$, δηλαδή

$$\frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0}=f'(c)$$

Αν *(2)* $f(\beta)<f'(c)$ τότε $\psi(\alpha)=\varphi(\beta)<f'(c)<\psi(\beta)$ οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\psi(x_0)=f'(c)$, δηλαδή

$$\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=f'(c)$$

ΘΕΜΑ 46

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε: $\alpha_1 \eta\mu x_0 + \beta_1 \sigma\upsilon\nu x_0 + \alpha_2 \eta\mu 2x_0 + \beta_2 \sigma\upsilon\nu 2x_0 = 0$

Λύση

Θεωρούμε $h(x) = -\alpha_1 \sigma\upsilon\nu x + \beta_1 \eta\mu x - \frac{1}{2}\alpha_2 \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2}\beta_2 \eta\mu 2x$

είναι $h(0) = -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2$

$h(2\pi) = -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2$

Άρα σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \eta\mu x_0 + \beta_1 \sigma\upsilon\nu x_0 + \alpha_2 \eta\mu 2x_0 + \beta_2 \sigma\upsilon\nu 2x_0 = 0$$

ΘΕΜΑ 47

Αν $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \nu$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε: $\sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k \eta\mu k x_0 + b_k \sigma\upsilon\nu k x_0) = 0$

Λύση

Έστω $f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}(-\alpha_k \sigma\upsilon\nu kx + b_k \eta\mu kx)$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}(-\alpha_k) = \sum_{k=1}^{\nu}\left(-\frac{\alpha_k}{k}\right)$$

$$f(2\pi) = \sum_{k=1}^{\nu}\left(-\frac{\alpha_k}{k}\right)$$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k\, \eta\mu\, kx + b_k\, \sigma\upsilon\nu\, kx)$$

οπότε $\sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k\, \eta\mu\, kx_0 + b_k\, \sigma\upsilon\nu\, kx_0) = 0$

ΘΕΜΑ 48

Έστω $\mathbf{f : [\alpha, \beta] \to R}$ μια συνάρτηση $\mathbf{\nu}$ φορές παραγωγίσιμη, που έχει $\mathbf{\nu}$ διακεκριμένες ρίζες $\mathbf{x_1=\alpha<x_2<x_3<\ldots<x_\nu=\beta}$. Τότε για κάθε $\mathbf{x \in [\alpha,\beta]}$ υπάρχει $\mathbf{c \in [\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)\,\frac{f^{\nu}(c)}{\nu!}}$$

Λύση

Αν $x = x_i$, $1 \le i \le \nu$, η ζητούμενη σχέση αληθεύει.
Έστω $x_0 \in [\alpha, \beta] - \{x_1, x_2 \ldots x_\nu\}$ δοσμένο και

$$\lambda = f(x_0)\,\frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_\nu)}$$ και

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\,[(x - x_1)\ldots(x - x_\nu)]$$

Αν φ είναι ν φορές παραγωγίσιμη και $\varphi'(x_i)=0$ για κάθε $0 \le i \le \nu$.

Συνεπώς η φ΄ έχει ν ρίζες, φ΄΄ έχει ν-1 ρίζες και $\varphi^{(\nu)}$ έχει μια ρίζα c.

$\varphi^{(\nu)}(x) = f^{(\nu)}(x)-\lambda\nu!$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Άρα $0 = \varphi^{(\nu)}(c) = f^{(\nu)}(c)-\lambda\nu! \Leftrightarrow \frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(c) = \lambda$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(c) = f(x_0)\frac{1}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_\nu)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_0) = (x_0-x_1)\dots(x_0-x_\nu)\frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!}$$

ΘΕΜΑ 49

Έστω $\mathbf{f : [\alpha, \beta] \to R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ και συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και $\mathbf{h : [\alpha, \beta] \to R}$, με $\mathbf{h(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \alpha & f(\alpha) & 1 \end{vmatrix}}$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)}$.

Λύση

Έχουμε $h(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \alpha & f(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0$ και $h(\beta) = \begin{vmatrix} \beta & f(\beta) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \alpha & f(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)=0$

$h(x) = x[f(\beta)-f(\alpha)]-f(x)(\beta-\alpha)+\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)$

$h'(x) = f(\beta)-f(\alpha)-(\beta-\alpha)f'(x)$

$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)(\beta-\alpha) = f(\beta)-f(\alpha)$

ΘΕΜΑ 50

Έστω $\mathbf{f}:(\alpha\,,\,\beta)\rightarrow\mathbf{R}$, μια συνάρτηση $\mathbf{v+1}$ φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν υπάρχουν $(\mathbf{v+2})$ διακεκριμένα σημεία της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ τα οποία είναι και σημεία γραφικής παράστασης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $\mathbf{v}$, αποδείξτε ότι τότε υπάρχει $\mathbf{c}\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f^{(v+1)}(c)=0}$.

Λύση

Έστω x_i, $i\in\{1,2,...,v+2\}$ οι τετμημένες των $(v+2)$ σημείων με $x_i<x_j$, όταν $i<j$ και $P_v(x)=\alpha_0x^v+\alpha_1x^{v-1}+...+\alpha_v$ το πολυώνυμο στο οποίο ανήκουν τα $(v+2)$ σημεία.

Έστω $g:(\alpha,\beta)\rightarrow R$ με $g(x)=f(x)-P_v(x)$. Είναι $g(x_i)=0$ για κάθε $i\in\{1,2,...v+2\}$. Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχουν $u_i\in(x_i,x_{i+1})$ $i\in\{1,2,...,v+2)$ τέτοια, ώστε $g'(u_i)=0$, $i\in\{1,2,...v+1\}$.

Εφαρμόζουμε ξανά το θ. Rolle στα διαστήματα $[u_i,u_{i+1}]$, $i\in\{1,2,...v\}$ για την g' οπότε υπάρχουν $c_i\in(u_i,u_{i+1})$, $i\in\{1,2,...,v\}$ τέτοια, ώστε $g''(c_i)=0$, $i\in\{1,2,...,v\}$.

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο και στο τέλος βρίσκουμε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g^{(v+1)}(c)=0 \Leftrightarrow$

$$f^{(v+1)}(c)=P_v^{(v+1)}(c)=0$$

ΘΕΜΑ 51

Έστω $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, $v\in N^*-\{1\}$ και οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbf{R}$, $\mathbf{i}\in\{1,2,...,v\}$ παραγωγίσιμες στο (α,β) και μη μηδενικές στο (α,β). Αν η $\mathbf{f}$ είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$ g_i συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ για κάθε $\mathbf{i}\in\{1,2,...,v\}$ και υπάρχουν

$j,k \in \{1,2,\ldots,\nu\}$ τέτοιοι, ώστε $g_j(\alpha)=g_k(\beta)=0$ τότε υπάρχει

$c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f'(c)}{f(c)}+\sum_{i=1}^{\nu}\dfrac{g_i'(c)}{g_i(c)}=0$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(f\cdot g_1\cdot g_2\ldots g_\nu):[\alpha,\beta]\to R^*$ πληρεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle.

Έστω $h=f\cdot g_1\cdot g_2\ldots g_\nu$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε $|f(x)|<M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Άρα $|h(x)|<M|k(x)|$, όπου $k(x)=g_1(x)\ldots g_\nu(x)$

$$\lim_{x\to\alpha}|h(x)|<M\lim_{x\to\alpha}|k(x)|=M|k(\alpha)|=0$$

Όμοια $\lim_{x\to\beta}|h(x)|=0$

Άρα $h(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}|h(x)|=0$ και $h(\beta)=\lim_{x\to\beta}|h(x)|=0$

οπότε η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(c)=0 \Leftrightarrow \frac{h'(c)}{h(c)}=0 \Leftrightarrow$$

$$0=\frac{f'(c)g_1(c)\ldots g_\nu(c)+f(c)g_1'(c)\ldots g_\nu(c)+\ldots+f(c)\ldots g_{\nu-1}(c)\,g_\nu'(c)}{f(c)\,g_1(c)\ldots g_\nu(c)}$$

$$\frac{f'(c)}{f(c)}+\frac{g_1'(c)}{g_1(c)}+\ldots+\frac{g_\nu'(c)}{g_\nu(c)}=0$$

ΘΕΜΑ 52

Έστω $f:[0,1]\to R$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο

$[0,1]$ με τις ιδιότητες $f(1)=f(0)+k$, $f'(1)=f'(0)=k$, όπου $k\in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν διακεκριμένα σημεία $x_1,x_2\in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$.

Λύση

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(1)-f(0)=f'(c)$. Άρα $f'(c)=k$

Έχουμε $f'(0)=f'(c)=k$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_1\in(0,c)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_1)=0$.

Έχουμε $f'(c)=f'(1)=k$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_2\in(c,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_2)=0$

Άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$, $x_1\neq x_2$, με $f''(x_1)=f''(x_2)$.

ΘΕΜΑ 53

Αν το σύστημα: $(\Sigma)\ \begin{cases}(\alpha+\beta)x+\alpha y+\beta\omega=0\\ \beta x+(\alpha+\beta)y+\alpha\omega=0\\ \alpha x+\beta y+(\alpha+\beta)\omega=0\end{cases}$

έχει άπειρες λύσεις και αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4\alpha^3x+2\beta^3=0$ όπου $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Επειδή το (Σ) είναι ομογενές και έχει άπειρες λύσεις, άρα θα πρέπει $D=0$

$$D=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & \beta\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha\\ \alpha & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\alpha+2\beta & \alpha & \beta\\ 2\alpha+2\beta & \alpha+\beta & \alpha\\ 2\alpha+2\beta & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\alpha+2\beta & \alpha & \beta\\ 0 & \beta & \alpha-\beta\\ 0 & \beta-\alpha & \alpha\end{vmatrix}=0$$

$(2\alpha+2\beta)|\alpha\beta-(\beta-\alpha)(\alpha-\beta)| = (2\alpha+2\beta)|\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2| =$

$= (2\alpha+2\beta)(\alpha\beta+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2| = (2\alpha+2\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$= 2\alpha^3-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta\alpha^2-2\alpha\beta^2+2\beta^3 = 2\alpha^3+2\beta^3 = 0$

Θεωρούμε: $h(x) = 2\alpha^3x^2+2\beta^3x$

$h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ $h(0)=0$ $h(1)=0$	Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $h'(x_0)=0$

$$\boxed{h'(x_0) = 4\alpha^3 x_0 + 2\beta^3 = 0}$$

ΘΕΜΑ 54

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f: [0, \infty] \to R}$, παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ συνεχής. Αν $\mathbf{f(0)=1}$, $|\mathbf{f(x)}| \le \mathbf{e^{-x}}$, για κάθε $\mathbf{x \ge 0}$, αποδείξτε ότι:

$$\mathbf{f'(x_0) = -e^{-x_0}}$$

Λύση

Έστω $g(x) = f(x)-e^{-x}$

$g(0) = f(0)-e^{0} = 1-1 = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-e^{-x}) = 0$ διότι $|f(x)| \le e^{-x}$

$g(0) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,\infty)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)+e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -e^{-x_0}$

ΘΕΜΑ 55

Έστω $\mathbf{f:[0,\alpha]\to R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f(0)=0}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{\beta>0}$, υπάρχει $\mathbf{\xi\in[0,\alpha]}$ τέτοιο, ώστε:

$$\beta f(t) = (\alpha - t) f'(t)$$

Λύση

Έστω $g:[0,\alpha]\to R$, με $g(x) = (\alpha-x)^{\beta} f(x)$, $g(0)=g(\alpha)=0$

οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $t\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $g'(t)=0$

Όμως $g'(x) = -\beta(\alpha-x)^{\beta-1}f(x)+(\alpha-x)^{\beta}f'(x)$

οπότε $f(t)\beta(\alpha-t)^{\beta-1} = (\alpha-t)^{\beta}f'(t) \Leftrightarrow \beta f(t) = (\alpha-t)f'(t)$

ΘΕΜΑ 56

Έστω $\mathbf{f}:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to \mathbf{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ με $\mathbf{f(x)\neq 0}$, $\mathbf{f'(x)\neq 0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\mathbf{f'(c)}}{\mathbf{f(c)}}+\mathbf{εφc=0}$$

Λύση

Έστω $h:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to R$ με $h(x)=\frac{συνx}{f(x)}$ $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(c) = 0$

Όμως $h'(x)=\frac{-ημx\, f(x)-συνx\, f'(x)}{f^2(x)}$

οπότε $-ημc\, f(c)-συνc\, f'(c)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{f(c)}+εφc=0$

ΘΕΜΑ 57

Έστω **f: [0,π]→R** μια συνάρτηση συνεχής στο **[0,π]** και παραγωγίσιμη στο **(0,π)**, με **f(x)≠0** και **f΄(x)≠0** για κάθε **x∈ [0,π]**.

Αποδείξτε ότι υπάρχει **c∈ (0,π)** τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(c)}{f(c)} = \sigma\varphi c$.

Λύση

Έστω h:[0,π]→R, με $h(x)=\frac{\eta\mu x}{f(x)}$, h(0)=h(π)=0, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει c∈(0,π) τέτοιο, ώστε h΄(c)=0.

Όμως $h'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x f(x)-\eta\mu x f'(x)}{f^2(x)}$

οπότε $-\sigma\upsilon\nu c f(c)=\eta\mu c f'(c) \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{f(c)}=\sigma\varphi c$

ΘΕΜΑ 58

Αποδείξτε ότι αν το πολυώνυμο $P_\nu(x)=\alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ ($\alpha_0\neq0$, $\alpha_i\in R$, $i=0,1,\ldots,\nu$) έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές, τότε και τα πολυώνυμα $P'_\nu(x)$, $P''_\nu(x)$, ..., $P_\nu^{(\nu-1)}(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P'_\nu(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες και στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Έστω $x_i\in R$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ με $P_\nu(x_i)=0$ και $x_i\neq x_j$ για $i\neq j$.

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στα διαστήματα

$[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ... , $[x_{\nu-1},x_\nu]$ για $P_\nu(x)$

οπότε υπάρχουν $x_1' \in (x_1,x_2)$, $x_2' \in (x_2,x_3)$, ... , $x'_{\nu-1} \in (x_{\nu-1},x_\nu)$ τέτοιο, ώστε

$P_\nu'(x_k')=0$, $k=1,2,\dots,\nu-1$ με $x_k' \neq x_e'$ για $k \neq e$.

Αν το πολυώνυμο $P_\nu(x)$ θα είχε μια πολλαπλή ρίζα α βαθμού p, δηλαδή

$P_\nu(x) = (x-\alpha)^P \alpha(x)$

τότε $P_\nu'(x) = (x-\alpha)^{P-1} \alpha_1(x)$

δηλαδή α είναι πολλαπλή ρίζα, βαθμού (P-1) για την $P_\nu'(x)$.

ΘΕΜΑ 59

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (-\pi,\pi)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε:

$$\xi_1\,\eta\mu(\xi_1^2+1)+\xi_2\,\eta\mu(\xi_2^2+1)=0$$

Λύση

Θεωρούμε $h(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2+1)$, $x \in [-\pi,\pi]$

η συνάρτηση h είναι συνεχής στα $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$ παραγωγίσιμη στα $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$ με $h'(x) = -2x\,\eta\mu(x^2+1)$

Από το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$ υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 \in (-\pi,0)$, $\xi_2 \in (0,\pi)$ ώστε:

$$h'(\xi_1)=\frac{h(0)-h(-\pi)}{\pi} \Leftrightarrow -2\xi_1\,\eta\mu(\xi_1^2+1)=\frac{\sigma\upsilon\nu 1-\sigma\upsilon\nu(\pi^2+1)}{\pi} \quad (1)$$

και

$$h'(\xi_2)=\frac{h(\pi)-h(0)}{\pi} \Leftrightarrow -2\xi_2\,\eta\mu(\xi_2^2+1)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi^2+1)-\sigma\upsilon\nu 1}{\pi} \quad (2)$$

Άρα προσθέτοντας την *(1)* και *(2)* παίρνουμε

$$\xi_1\,\eta\mu(\xi_1^2+1)+\xi_2\,\eta\mu(\xi_2^2+1)=0$$

ΘΕΜΑ 60

Έστω $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i=0,1,\ldots,\nu$, με $\sum_{i=0}^{\nu} \frac{c_i}{1+i} = 0$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = \sum_{k=0}^{\nu} c_k x^k$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbf{R}$.

Λύση

Έστω $Q(x) = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{c_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1}$

Έχουμε $Q(0) = 0$ και $Q(1) = \frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} \frac{+\ldots+c_\nu}{\nu+1} = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{c_i}{i+1} = 0$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $Q'(x_0)=0$.

$$Q'(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_\nu x^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} c_k x^k$$

$$Q'(x_0) = P(x_0) = 0$$

ΘΕΜΑ 61

Έστω $\mathbf{f}:[0,1]\to\mathbf{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f(0)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0} \in [\mathbf{0,1}]$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{1 - x_0}$$

Λύση

Έστω $g(x) = (1-x)f(x)$, $x\in[0,1]$

$g(0) = f(0) = 0$

$g(1) = 0$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Όμως $f'(x) = -f(x)+(1-x)f'(x)$

οπότε $-f(x_0)+(1-x_0)f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{1-x_0}$

ΘΕΜΑ 62

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αποδείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών της **f**, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $(\lambda f+f')$ για κάθε $\lambda\in R$.

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$, με $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$ και x_1, x_2 δυο ρίζες της f.

Έχουμε $g(x_1) = g(x_2) = 0$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

$g'(x) = \lambda e^{\lambda x} f(x)+e^{\lambda x} f'(x) = e^{\lambda x} [f'(x)+\lambda f(x)]$

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda f(\xi)+f'(\xi) = 0$

Άρα μεταξύ δυο ριζών της f υπάρχει μια ρίζα ξ της $\lambda f+f'$.

ΘΕΜΑ 63

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, $\alpha,\beta\in R^*$ και **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{f(\alpha)-f(c)+f(\beta)=(\alpha-c+\beta)f'(c)}.$$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$, με $g(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(x)+f(\beta)}{\alpha-x+\beta}$

$g(\alpha)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$, $g(\beta)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

Άρα $g(\alpha) = g(\beta)$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c)=0$.

$$g'(x)=\frac{-f'(x)\,[\alpha-x+\beta]+f(\alpha)-f(x)+f(\beta)}{(\alpha-x+\beta)^2}$$

Άρα $f(\alpha)-f(c)+f(\beta) = (\alpha-c+\beta)f'(c)$

ΘΕΜΑ 64

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ είναι $\mathbf{\nu}$ φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ και έχει $\mathbf{(\nu+1)}$ διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$, αποδείξτε ότι $\mathbf{f^{(\nu)}}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$.

Λύση

Έστω x_1, x_2 δυο ρίζες της f.

Τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $y_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(y_1)=0$.

Συνεπώς η f' έχει τουλάχιστον ν ρίζες στο $[\alpha,\beta]$.

Άρα f'' έχει τουλάχιστον (ν-1) ρίζες στο $[\alpha,\beta]$

$f^{(\nu-1)}$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $[\alpha,\beta]$ και

$f^{(\nu)}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ 65

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$, μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$
Αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\alpha+\beta-2c}{(c-\alpha)(c-\beta)}=f'(c)$$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$ με $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\,e^{f(x)}$, $g(\alpha)=g(\beta)=0$, οπότ βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c)=0$.

$g'(x)=(x-\beta)e^{f(x)}+(x-\alpha)e^{f(x)}+(x-\alpha)(x-\beta)f'(x)e^{f(x)}$

Άρα $(c-\beta)e^{f(c)}+(c-\alpha)e^{f(c)}+(c-\alpha)(c-\beta)f'(c)e^{f(c)}=0$

$\Leftrightarrow\ c-\beta+c-a+(c-\alpha)(c-\beta)f'(c)=0$

$\Leftrightarrow\ (c-\alpha)(c-\beta)f'(c)=\alpha+\beta-2c$

$\Leftrightarrow\ f'(c)=\dfrac{\alpha+\beta-2c}{(c-\alpha)(c-\beta)}$

ΘΕΜΑ 66

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to R$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμ στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $g(x)\neq 0$, και $g'(x)\neq 0$ για κάθ $x\in[\alpha,\beta]$, αποδείξτε ότι υπάρχει $c_\nu\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(c_\nu)}{g'(c_\nu)}=\nu\frac{f(c_\nu)}{g(c_\nu)}\quad \text{για κάθε}\quad \nu\in N.$$

Λύση

Έστω $h:[\alpha,\beta]\to R$ με $h(x)=\dfrac{f(x)}{g^{\nu}(x)}$ $h(\alpha) = h(\beta) = 0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c_\nu \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(c_\nu) = 0$.

$$h'(x)=\frac{g^{\nu}(x)\,f'(x)-\nu\, g^{\nu-1}(x)\,g'(x)\,f(x)}{g^{2\nu}(x)}$$

Άρα $g^{\nu}(c_\nu)\,f'(c_\nu)=\nu\, g^{\nu-1}(c_\nu)\,g'(c_\nu)\,f(c_\nu) \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(c_\nu)}{g'(c_\nu)}=\nu\,\frac{g^{\nu-1}(c_\nu)\,f(c_\nu)}{g^{\nu}(c_\nu)}=\nu\,\frac{f(c_\nu)}{g(c_\nu)}$$

διότι $g'(x)$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ 67

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=f(x)+\alpha f'(x)+\alpha^2 f''(x)+\ldots+\alpha^{\nu} f^{(\nu)}(x)}$ όπου **f** είναι ένα πολυώνυμο **ν**-βαθμού και $\boldsymbol{\alpha\in R}$. Αν η **g** έχει πραγματικές ρίζες, αποδείξτε ότι και η **f** έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

Έστω $h(x) = e^{-x/\alpha}g(x)$. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R. Έστω x_1, x_2 δυο ρίζες του g. Τότε $h(x_1) = h(x_2) = 0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(c) = 0$.

Όμως $h'(x) = -\dfrac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}g(x)+e^{-x/\alpha}g'(x)$

οπότε $-\dfrac{1}{\alpha}e^{-c/\alpha}g(c)+e^{-c/\alpha}g'(c) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\alpha}g(c)+g'(c) = 0$

$\Leftrightarrow g(c) = \alpha g'(c)$

$\Leftrightarrow f(c)+\alpha f'(c)+\alpha^2 f''(c)+\ldots+\alpha^{\nu} f^{(\nu)}(c) =$
$= \alpha f'(c)+\alpha^2 f''(c)+\ldots+\alpha^{\nu} f^{(\nu)}(c)+\alpha^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(c)$

$\Leftrightarrow \alpha^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(c) = f(c)$

Όμως βαθμ.$f(x) = \nu$, οπότε $f^{(\nu+1)} = 0$.

Άρα υπάρχει $c \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(c) = 0$.
Άρα μεταξύ δυο ριζών της g βρίσκεται τουλάχιστον μια ρίζα της f.

ΘΕΜΑ 68

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to R$ δυο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$,παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Λύση

Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επίσης $h(\alpha) = h(\beta)$. Άρα βάσει του Θ. Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0 \iff \frac{f'(\xi)\,g(\xi)-f(\xi)\,g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0 \iff$$

$$\iff f'(\xi)\,g(\xi)=f(\xi)\,g'(\xi) \iff$$

$$\iff \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ διότι $g'(\xi)$ και $g(\xi)\neq 0$.

ΘΕΜΑ 69

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) η οποία μηδενίζεται στα σημεία α, και β και μόνο σ' αυτά. Αποδείξτε ότι για κάθε $k\in R$ υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$ με $g(x) = e^{-kx}f(x)$

g-συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β)

$g(\alpha) = e^{-k\alpha}f(\alpha) = 0$, $g(\beta) = e^{-k\beta}f(\beta) = 0$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$

$-ke^{-k\xi}f(\xi)+e^{-k\xi}f'(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow$ $e^{-k\xi}(f'(\xi)-kf(\xi)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$ διότι $f(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 70

Υποθέτουμε ότι η πραγματική συνάρτηση **g** είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και στρέφει τα κοίλα κάτω για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $g(\alpha)=g(\beta)=1998$, να αποδείξετε ότι $g(x)>1998$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Λύση

Από το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$g'(x_0)=0$

Επειδή $g''(x)<0$ $\Rightarrow$ g' γνησίως φθίνουσα.

Για $x>x_0$ $\Rightarrow$ $g'(x)<g'(x_0)=0$

Άρα η g γνησίως φθίνουσα.

άρα για $x<\beta$ $\Rightarrow$ $g(x)>g(\beta)=1998$.

Αν $x<x_0$ $\Rightarrow$ $g'(x)>g'(x_0)=0$

δηλαδή η g γνησίως αύξουσα, οπότε

για $x>\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha)=1998$.

Άρα $g(x)>1998$ για $x\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 71

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f_1,f_2,f_3:[\alpha,\beta]\to R}$, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(\alpha) & f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ f_1(\beta) & f_2(\beta) & f_3(\beta) \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$, με $f(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(\alpha) & f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ f_1(\beta) & f_2(\beta) & f_3(\beta) \end{vmatrix}$

$f(x) = A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+A_3f_3(x)$, όπου

$A_1=\begin{vmatrix} f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ f_2(\beta) & f_3(\beta) \end{vmatrix}$, $A_2=\begin{vmatrix} f_3(\alpha) & f_1(\alpha) \\ f_3(\beta) & f_1(\beta) \end{vmatrix}$, $A_3=\begin{vmatrix} f_1(\alpha) & f_2(\alpha) \\ f_1(\beta) & f_2(\beta) \end{vmatrix}$

Έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Άρα βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$, δηλαδή $A_1f_1'(\xi)+A_2f_2'(\xi)+A_3f_3'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(\alpha) & f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ f_1(\beta) & f_2(\beta) & f_3(\beta) \end{vmatrix} = 0$$

ΘΕΜΑ 72

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε: 1) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, 2) $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, 3) $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\dfrac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $c_1,c_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε: $f(c_1)f''(c_1)+f(c_2)f''(c_2)>0$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$, με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}=g(\beta)$

οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c_1)=0$.

Όμως $g'(x)=\dfrac{[f'(x)]^2-f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}$

οπότε $[f'(c_1)]^2=f(c_1)\,f''(c_1)$ *(1)*

Έστω $h:[\alpha,\beta]\to R$, με $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $h(\alpha)=\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}=\dfrac{f'(\beta)}{f(\beta)}=h(\beta)$

οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(c_2)=0$.

Όμως $h'(x)=\dfrac{f''(x)\,f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$

οπότε $f''(c_2)\,f(c_2)=[f'(c_2)]^2$ *(2)*

Προσθέτουμε τις *(1)* και *(2)* και είναι: $f(c_1)\,f''(c_1)+f(c_2)\,f''(c_2)>0$

ΘΕΜΑ 73

Έστω $\alpha,\beta\gamma\in R$, $\alpha<\beta<\gamma$, και $f:[\alpha,\gamma]\to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi\in(\alpha,\beta)$, $\eta\in(\alpha,\gamma)$, $\xi<\eta$ τέτοιο, ώστε: $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\,f'(\xi)$ και

$$f(\alpha)-f(\gamma) = (\alpha-\gamma)\, f'(\eta)$$

Λύση

Βάσει του θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi\in(\alpha,\beta)$ και $\zeta\in(\beta,\gamma)$ τέτοιοι, ώστε:

$f(\alpha)-f(\beta) = (\alpha-\beta)\, f'(\xi)$ και

$f(\beta)-f(\gamma) = (\beta-\gamma)\, f'(\eta)$

Όμως $\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} =$

$= f'(\zeta)\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} + f'(\xi)\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$

Θέτουμε $\lambda = \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$ και είναι $f'(\zeta)\,\lambda + f'(\xi)(1-\lambda) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$

Επειδή $\lambda f'(\zeta)+f'(\xi)(1-\lambda)$ δηλαδή $\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$ βρίσκεται μεταξύ $f'(\xi)$ και $f'(\zeta)$ και η f' έχει την ιδιότητα Darboux (των ενδιάμεσων τιμών) υπάρχει $\eta\in(\xi,\zeta)$ τέτοιοι, ώστε $f'(\eta) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$

ΘΕΜΑ 74

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$. Αν x_1, x_2, x_3 και $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ αντίστοιχα αποτελούν αριθμητικές προόδους, αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{f''(c)=0}$.

Λύση

Έχουμε $x_3-x_2 = x_2-x_1$ και $f(x_3)-f(x_2) = f(x_2)-f(x_1)$

Βάσει του θ.Μ.Τ. υπάρχει $y_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)\, f'(y_1)$ *(1)*

και $y_2\in(x_2,x_3)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_3)-f(x_2) = (x_3-x_2)\, f'(y_2)$ *(2)*

Από τις *(1)* και *(2)* έχουμε

$(x_2-x_1)\, f'(y_1) = (x_3-x_2)\, f'(y_2) \Leftrightarrow f'(y_1) = f'(y_2)$

f'-συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[y_1,y_2]$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(y_1,y_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(c) = 0$.

ΘΕΜΑ 75

Έστω $\mathbf{f:[0,1]\to R_+^*}$ μια συνάρτηση μη σταθερή, συνεχής στο $\mathbf{[0,1]}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,1)}$, με $\mathbf{f(0)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\mathbf{\alpha,\beta\in(0,1)}$ τέτοιοι, ώστε: $\mathbf{0<\alpha<\beta<1}$ και $\mathbf{\beta f'(\alpha)<f'(\beta)}$

Λύση

Έστω $g:[0,1]\to R$, με $g(x) = (1-x)f(x)$, $g(0) = f(0) = 0$ και $g(1)=0$

Άρα βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow (1-c)f'(c)-f(c0 = 0$

Επειδή $0<c<1$ είναι $0<1-c<1$, οπότε από την ισότητα $(1-c)f'(c) = f(c)$ έχουμε $f(c) < f'(c)$.

Θέτουμε $\beta=c$, οπότε $\beta\in(0,1)$ και $f(\beta)<f'(\beta)$ *(1)*

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[0,\beta]$, οπότε υπάρχει $\alpha\in(0,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$\frac{f(\beta)-f(0)}{\beta} = f'(\alpha) \Leftrightarrow f(\beta)=\beta f'(\alpha)$ *(2)*

Από τις *(1)* και *(2)* έχουμε $\beta f'(\alpha) < f'(\beta)$, όπου $0<\alpha<\beta<1$.

ΘΕΜΑ 76

Έστω $\mathbf{f:[0,\infty]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbf{[0,\infty]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,\infty)}$, με $\mathbf{f'(x)\geq 1}$ για κάθε $\mathbf{x\in(0,\infty)}$ και $\mathbf{f(0)<0}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\mathbf{x_0 \in (0,\infty)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=0}$.

Λύση

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$, $x>0$, οπότε υπάρχει $c_x \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$f(x)-f(0) = x\, f'(c_x)$

Όμως $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x>0$, οπότε

$f(x)-f(0) \geq x \iff f(x) \geq x+f(0)$

Για x αρκετά μεγάλο είναι $f(x) \geq x+f(0) > 0$

Όμως $f(0) < 0$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

$f'(x) \geq 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 77

Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f:(0,\infty)\to R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,\infty)}$ και $\mathbf{f''(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$. Αν $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta \in (0,\infty)}$ και $\boldsymbol{\alpha<\beta<\gamma<\delta}$ και $\boldsymbol{\alpha+\delta=\beta+\gamma}$, να εξεταστεί ποιος από τους αριθμούς $\mathbf{f(\alpha)+f(\delta)}$ και $\mathbf{f(\beta)+f(\gamma)}$ είναι μεγαλύτερος.

Λύση

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]\subset(0,\infty)$ και $[\gamma,\delta]\subset(0,\infty)$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\gamma,\delta)$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi_1) \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma} = f'(\xi_2) \quad (2)$$

Όμως $\beta<\gamma$, οπότε $\xi_1<\xi_2$. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$, η f' είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$, οπότε

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ *(3)*

Εξάλλου $\alpha+\delta = \beta+\gamma \Leftrightarrow \beta-\alpha = \delta-\gamma$

Από την *(3)* έχουμε $f'(\xi_1)(\beta-\alpha) < f'(\xi_2)(\delta-\gamma)$

Συνεπώς λόγω των *(1)* και *(2)* είναι

$f(\beta)-f(\alpha) < f(\delta)-f(\gamma) \Leftrightarrow f(\beta)+f(\gamma) < f(\alpha)+f(\delta)$

ΘΕΜΑ 78

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(c) = \frac{f(\alpha)-f(c)}{c-\beta}$$

Λύση

Έστω $g(x) = (x-\beta)\, f(x)$. Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο,

ώστε $\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} = g'(c)$

Όμως $g'(x) = f(x)+(x-\beta)\, f'(x)$

οπότε $f(c)+(c-\beta)\, f'(c) = \dfrac{-(\alpha-\beta)\, f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$

$f(c)+(c-\beta)\, f'(c) = f(\alpha) \Leftrightarrow$

$f(\alpha)-f(c) = (c-\beta)\, f'(c)$

ΘΕΜΑ 79

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R_+^*}$ μια συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Λύση

Έστω $g(x) = \ln f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, οπότε βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(c) = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta-\alpha} = g'(c) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)\, f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

ΘΕΜΑ 80

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{3^x - 2^x = 1 + 3(2^{x/3} + 2^{2x/3})}$ για κάθε $\mathbf{x > 0}$.

Λύση

Έχουμε $3^x - 2^x = 1 + 3\cdot 2^{x/3} + 3\cdot 2^{2x/3}$

$3^x = 1 + 2^x + 3\cdot 2^{x/3} + 3\cdot 2^{2x/3}$

$3^x = (1+2^{x/3})^3 \Leftrightarrow 3^{x/3} = 1 + 2^{x/3}$

Θεωρούμε $h\left(\frac{x}{3}\right) = 3^{x/3} - 2^{x/3} - 1$ Για $x=3$ έχουμε $h(1)=0$

Επίσης $\frac{1}{3} h'\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3^{x/3}\ln 3 - \frac{1}{3} 2^{x/3}\ln 2$

Επομένως $h'\left(\frac{x}{3}\right) = 3^{x/3}\ln 3 - 2^{x/3}\ln 2 > 0$ διότι $3^{x/3} > 2^{x/3}$ και $\ln 3 > \ln 2$.

Άρα η h γν. αύξουσα, δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=3$.

ΘΕΜΑ 81

Ένα σημείο **M(x,y)** κινείται στην υπερβολή $4x^2-9y^2=36$ έτσι ώστε η συντεταγμένη του **y** να αυξάνεται με ρυθμό **4 m/sec**. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συντεταγμένης **x** όταν **x=5 m**; Ποια είναι η κλίση της καμπύλης για **x=5 m**;

Λύση

Έχουμε $\frac{dy}{dt}=4\ {}^{m}\!/_{sec}$

Είναι $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

Για $x=5$ έχουμε $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{5}{6}$. Αλλά $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}=\pm\frac{12}{5}\ {}^{m}\!/_{sec}$

ΘΕΜΑ 82

Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης: $3^x+4^x=2^x+5^x$.

Λύση

Έστω $f(y)=y^x$, $y\in R$. Εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [2,3] και [4,5], οπότε υπάρχουν $\lambda_1\in(2,3)$ και $\lambda_2\in(4,5)$ τέτοιοι, ώστε:

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f'(\lambda_1) \quad \text{και} \quad \frac{f(5)-f(4)}{5-4}=f'(\lambda_2)$$

Άρα $3^x-2^x = f'(\lambda_1)$ και $5^x-4^x = f'(\lambda_2)$.

Όμως $3^x-2^x = 5^x-4^x$

οπότε $f'(\lambda_1) = f'(\lambda_2) \Leftrightarrow x\lambda_1^{x-1}=x\lambda_2^{x-1} \Leftrightarrow x=0$

ή $\lambda_1^{x-1}=\lambda_2^{x-1} \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

ΘΕΜΑ 83

Έστω **$f:(\alpha,\beta)\to R$,** μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν υπάρχουν **3** σημεία της γραφικής παράστασης της **f** τα οποία να είναι συνευθειακά, αποδείξτε ότι υπάρχει **$c\in(\alpha,\beta)$** τέτοιο, ώστε **$f''(c)=0$**.

Λύση

Έστω $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $C(x_3,f(x_3))$ τα δοσμένα σημεία. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- B είναι το μέσο του AC. Τότε έχουμε

  $x_3-x_2 = x_2-x_1$ και $f(x_3)-f(x_2) = f(x_2)-f(x_1)$ *(1)*

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $y_1\in(x_1,x_2)$ και $y_2\in(x_2,x_3)$, $y_1\neq y_2$ τέτοιο, ώστε

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}&=f'(y_1)\\ \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}&=f'(y_2)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Από τις *(1)* και *(2)* έχουμε $f'(y_1) = f'(y_2)$

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στο διάστημα (y_1,y_2).

Άρα υπάρχει $c\in(y_1,y_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(c)=0$.

- B δεν είναι μέσο του AC. Σ' αυτήν την περίπτωση το B διαιρεί το AC στο λόγο k, $k\neq-1$.

Άρα $x_2=\dfrac{x_1+kx_3}{1+k}$, $f(x_2)=\dfrac{f(x_1)+k\,f(x_3)}{1+k}$

Συνεπώς $x_2-x_1 = k(x_3-x_2)$ και $f(x_2)-f(x_1) = k[f(x_3)-f(x_2)]$ *(3)*

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $y_1\in(x_1,x_2)$ και $y_2\in(x_2,x_3)$ τέτοιο, ώστε

$$\left.\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2-x_1)\,f'(y_1)\\ f(x_3)-f(x_2)&=(x_3-x_2)\,f'(y_2)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Από τις *(3)* και *(4)* έχουμε $f'(y_1) = f'(y_2)$

οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(y_1,y_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(c)=0$.

ΘΕΜΑ 84

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ φραγμένη. Αποδείξτε ότι τότε η $\mathbf{f}$ είναι φραγμένη.

Λύση

Επειδή η f' είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε $|f'(x)|\leq M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Έστω $x,x_0\in[\alpha,\beta]$ με x_0 δοσμένο.

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(x,x_0)$ τέτοιο, ώστε

$f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\, f'(c)$

Άρα $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|\,|f'(c)| \leq |x-x_0|\, M$

Συνεπώς $|f(x)| = |(f(x)-f(x_0))+f(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)| \leq$

$\leq |x-x_0|\, M+|f(x_0)| \leq |\beta-\alpha|\, M+|f(x_0)|$

Άρα η f είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ 85

Έστω $\mathbf{f:[0,\infty]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbf{[0,\infty]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,\infty)}$, με $\mathbf{f(0)=0}$ και $\mathbf{f'}$ αύξουσα. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=\frac{1}{x}\,f(x)}$, $\mathbf{x>0}$ είναι αύξουσα.

Λύση

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\, f(x) + \frac{1}{x}\, f'(x) = \frac{1}{x}\,[f'(x) - \frac{1}{x}\, f(x)] \quad \text{για} \quad x>0$$

Έστω $x\in(0,\infty)$. Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε

$f(x)-f(0) = (x-0)\cdot f'(c)$

Όμως η f' είναι αύξουσα, οπότε είναι

$$f(x)-0 = x f'(c) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(c) \leq f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x} f(x) \geq 0$$

Άρα $g'(x) \geq 0$, οπότε η g είναι αύξουσα στο $(0,\infty)$.

ΘΕΜΑ 86

Έστω $\mathbf{g:R_+^* \to R}$, μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\mathbf{g'(x) > e^x}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Λύση

Έχουμε $g'(x)>e^x \Leftrightarrow g'(x)-e^x>0 \Leftrightarrow (g(x)-e^x)'>0$

δηλαδή η $f(x) = g(x)-e^x$ είναι γνησίως αύξουσα

Επειδή $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow g(x)-e^x>f(0) \Rightarrow g(x)>e^x+f(0)$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

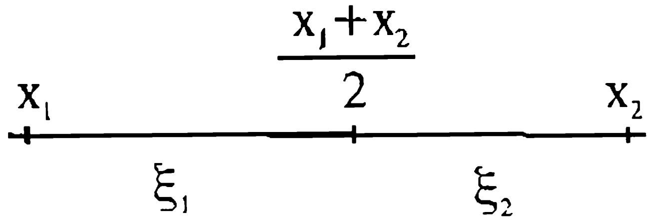
ΘΕΜΑ 87

Έστω $\mathbf{g}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\mathbf{x_1,x_2}]$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{2}(g(x_1)+g(x_2)) = g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0} \in (\mathbf{x_1,x_2})$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f''(x_0)=0}$

Λύση



Για την g στα διαστήματα:

$$\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right], \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$$

ισχύει το Θ.Μ.Τ., άρα

$$g'(\xi_1)=\frac{g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-g(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=\frac{2g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-2g(x_1)}{x_2-x_1}\overset{(1)}{=}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(x_2)-g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{2g(x_2)-2g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}\overset{(1)}{=}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

Επομένως $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$.
Σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_2)$ ώστε $g''(x_0)=0$

ΘΕΜΑ 88

Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha<c<\beta$, με $m, n, p\in\mathbb{R}_+^*$ και $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=m\eta\mu(x-\alpha)+n\eta\mu(x-\beta)+p\eta\mu(x-c)$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)f(\beta)\neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοιοι, ώστε: $\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_1)}=\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(x_2)}$

Λύση

1) Αν $f(c)=0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1\in(\alpha,c)$ και $x_2\in(c,\beta)$ τέτοιοι, ώστε

$f(c)-f(\alpha) = f'(x_1)(c-\alpha)$ και $f(\beta)-f(c) = (\beta-c)f'(x_2)$

δηλαδή $f(\alpha) = (\alpha-c)f'(x_1)$ και $f(\beta) = (\beta-c)f'(x_2)$ *(1)*

$f(\alpha)f(\beta)\neq 0$ οπότε $f'(x_1)\neq 0$, $f'(x_2)\neq 0$

Από την *(1)* έχουμε $\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_1)}=\alpha-c$ και $\dfrac{f(\beta)}{f'(x_2)}=\beta-c$

οπότε $\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_1)}=\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(x_2)}$

2) Έστω $f(c)\neq 0$. Επειδή $f(\alpha)f(\beta)\neq 0 \Leftrightarrow f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(c)>0$

Άρα $n\eta\mu(\alpha-\beta)+p\eta\mu(\alpha-c)>0$, $m>0$

$m\eta\mu(\beta-\alpha)+p\eta\mu(\beta-c)>0$, $n>0$

Είναι $\left.\begin{array}{l} mn\eta\mu(\alpha-\beta)+mp\eta\mu(\alpha-c)>0 \\ mn\eta\mu(\beta-\alpha)+np\eta\mu(\beta-c)>0 \end{array}\right\}$ τις προσθέτουμε

άρα $mp\eta\mu(\alpha-c)+np\eta\mu(\beta-c)>0 \Leftrightarrow$

$m\ \eta\mu(\alpha-c)+n\ \eta\mu(\beta-c)>0 \Leftrightarrow$

$m\ \eta\mu(c-\alpha)+n\ \eta\mu(c-\beta)<0$ άτοπο διότι $f(c)>0$

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορούν να είναι $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(c)<0$. Άρα σε δυο από τα σημεία α,β,γ η f αλλάζει πρόσημο, οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(0)=0$. Αν επαναλάβουμε το συλλογισμό της περίπτωσης *(1)* βρίσκουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 89

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2+|x^2+x-2|}{x+|x+1|}}$. i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της **f**. (ii) Να διαπιστώσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $\mathbf{[1,2]}$. Σε περίπτωση που εφαρμόζεται να βρεθούν τα ξ.

.ύση

)

$$|x^2+x-2| = \begin{cases} x^2+x-2 \ , \ \alpha\nu \ x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty) \\ -x^2-x+2 \ , \ \alpha\nu \ x\in(-2,1) \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \ , \ \alpha\nu \ x\geq -1 \\ -x-1 \ , \ \alpha\nu \ x<-1 \end{cases}$$

ρα

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x^2+x-2}{x-x-1} \ , & \alpha\nu \ \ x<-2 \\ \dfrac{x^2-x^2-x+2}{x-x-1} \ , & \alpha\nu \ \ x\in[-2,-1) \\ \dfrac{x^2-x^2-x+2}{x+x+1} \ , & \alpha\nu \ \ x\in(-1,1)-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ \dfrac{x^2+x^2+x-2}{x+x+1} \ , & \alpha\nu \ \ x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(2x^2+x-2) \ , & \alpha\nu \ \ x\in(-\infty,-2) \\ x-2 \ , & \alpha\nu \ \ x\in[-2,-1) \\ \dfrac{-x+2}{2x+1} \ , & \alpha\nu \ \ x\in(-1,1)-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ \dfrac{2x^2+x-2}{2x+1} \ , & \alpha\nu \ \ x\in[1,\infty) \end{cases}$$

ρα $f: R-\{-\frac{1}{2}\}$

i) Είναι προφανές ότι η f είναι συνεχής στο [1,2] και παραγωγίμη στο (1,2). Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στο [1,2]. νεπώς υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε: $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\xi)$

$$f'(\xi) \quad \frac{4\xi^2+4\xi+5}{4\xi^2+4\xi+1} \ \Rightarrow \ \frac{4\xi^2+4\xi+5}{4\xi^2+4\xi+1}=\frac{19}{15} \ \Rightarrow \ 2\xi^2+2\xi-7=0 \ \Rightarrow$$

$$\xi_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$$

Άρα $\xi=\frac{\sqrt{15}-1}{2}\in(1,2)$

ΘΕΜΑ 90

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R_+^*}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$. Αποδείξτε ότι στο διάστημα $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ υπάρχουν τουλάχιστον $(\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1})$ σημεία $\mathbf{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_\nu}$ τέτοια, ώστε:

$$\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}=\nu\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Λύση

Διαιρούμε τα διαστήματα σε ν ίσα διαστήματα με τα σημεία $\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_\nu=\beta$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to R$ με $g(x)=\ln f(x)$ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, $i\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$.

Άρα $g(\alpha_i)-g(\alpha_{i-1})=g'(x_i)(\alpha_i-\alpha_{i-1})$ όπου $x_i\in(\alpha_{i-1},\alpha_i)$ $i\in\{1,2,\ldots,\nu\}$

Άρα $\ln f(\alpha_i)-\ln f(\alpha_{i-1})=\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}(\alpha_i-\alpha_{i-1})$, $i\in\{1,2,\ldots,\nu\}$ $\Leftrightarrow$

$$\ln\frac{f(\alpha_i)}{f(\alpha_{i-1})}=\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}(\alpha_i-\alpha_{i-1})\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha_i)}{f(\alpha_{i-1})}=e^{\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}(\alpha_i-\alpha_{i-1})}=e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}}\ \Leftrightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f(\alpha_i)}{f(\alpha_{i-1})}=e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_0)}\,\frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)}\cdots\frac{f(\alpha_\nu)}{f(\alpha_{\nu-1})}=e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} \quad (2)$$

Από τις *(1)* και *(2)* είναι

$$e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}}=e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{\nu}\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}=\nu\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

ΘΕΜΑ 91

Αποδείξτε ότι το σημείο **c** που προκύπτει από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\ln x,\ x>0}$, στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ πληρεί τη σχέση: $\sqrt{\alpha\beta}<c<\frac{\alpha+\beta}{2}$

Λύση

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\beta)-f(\alpha) = f'(c)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \ln\beta - \ln\alpha = \frac{1}{c}(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c}(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln\frac{\beta}{\alpha}}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow c = \frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{\beta}{\alpha}}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sqrt{\alpha\beta} < \frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{\beta}{\alpha}} < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} < \frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\ln\frac{\beta}{\alpha}} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (1)$$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $\sqrt{t} < \frac{t-1}{\ln t} < \frac{1}{2}(t+1)$ για κάθε $t>1$.

Θα αποδείξουμε ότι $\ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$ και $\frac{t-1}{t+1} < \frac{1}{2}\ln t$ για κάθε $t>1$.

$$\ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

Έστω $\varphi(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}$

$$\varphi'(t) = \frac{2\sqrt{t}-t-1}{2t\sqrt{t}} = -\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} < 0$$

Άρα η f γν. φθίνουσα, οπότε

$\varphi(t) < \varphi(1) = 0$

Άρα $\ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0 \Leftrightarrow \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$

Έστω $g(t) = \frac{1}{2}\ln t - \frac{t-1}{t+1}$

Άρα g - γνησίως αύξουσα και $g(t)>g(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{t-1}{t+1}<\dfrac{1}{2}\ln t$

Συνεπώς η *(1)* αληθεύει.

ΘΕΜΑ 92

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ γνησίως μονότονη και $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ με $\mathbf{f'(c)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{x_0\neq\alpha}$ και $\mathbf{f(x_0)=f(\alpha)}$ ή $\mathbf{x_0\neq\beta}$ και $\mathbf{f(x_0)=f(\beta)}$.

Λύση

Έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f'(c)=0$ έχουμε

$$f'(x)=\begin{cases}<0\ ,\ x\in[\alpha,c)\\ >0\ ,\ x\in(c,\beta]\end{cases}$$

Άρα το c είναι τοπικό ελάχιστο της f, οπότε

$f(c)<f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]-\{c\}$.

Αν 1) $f(\alpha)<f(\beta)$,

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(\alpha)$. Η g είναι συνεχής στο (c,β) και

$g(c)g(\beta)=[f(c)-f(\alpha)][f(\beta)-f(\alpha)]<0$

Άρα υπάρχει $x_0\in(c,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=f(\alpha)$

Αν 2) $f(\alpha)>f(\beta)$,

Θεωρούμε $g(x)=f(x)-f(\beta)$ οπότε

$g(\alpha)g(c)=[f(\alpha)-f(\beta)][f(c)-f(\beta)]<0$

Άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,c)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=f(\beta)$

ΘΕΜΑ 93

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$, μια συνάρτηση άρτια, με $\mathbf{f(0)=0}$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και δε μηδενίζεται στο $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι $\mathbf{f(x)f''(x)\geq 0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ και $\mathbf{f(x)f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0}$.

Λύση

Το σύνολο των συναρτήσεων που πληρούν τις παραπάνω σχέσεις είναι μη κενό διότι περιέχει τη συνάρτηση $f_0(x)=x^2$

$f(x) = f(-x)$ οπότε $f'(x) = -f'(-x)$

και άρα η f' ειναι περιττή και $f'(0)=0$

Επειδή η f'' έχει την ιδιότητα Darboux και δε μηδενίζεται στο R, προκύπτει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Έστω $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f'(x)>f'(0)=0$ για κάθε $x\in R_+$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R_+ και $f(x)>f(0)=0$ για κάθε $x>0$. Όμως $f(x)=f(-x)$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$. Άρα $f(x)f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$ και $f(x)f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
- Όταν $f''(x)<0$ εργαζόμαστε όμοια.

ΘΕΜΑ 94

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$, μια συνάρτηση με $\mathbf{f'}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$. Αν $\mathbf{|f'(x)+f(x)|\leq 1}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$, αποδείξτε ότι:

$$\mathbf{f(x)-e^{-x}f(0)\leq|1-e^{-x}|}, \text{ για κάθε } \mathbf{x\in R}.$$

Λύση

Έστω $g:(-\infty,0]\to R$, με $g(x) = e^x f(x)+e^x-f(0)-1$

$g(0) = f(0)+1-f(0)-1 = 0$

$g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)+e^x = e^x(f(x)+f'(x)+1) \geq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$

Άρα η g είναι αύξουσα στο $(-\infty,0]$, οπότε $g(x) \leq g(0) = 0$

Όμοια ορίζουμε $h:[0,-\infty)\to R$ και βρίσκουμε

$h(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[0,-\infty)$

Άρα $e^x f(x)+e^x-f(0)-1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$f(x)+1-e^{-x}f(0)-e^{-x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$f(x)-e^{-x}f(0) \leq e^{-x}-1$

ΘΕΜΑ 95

Έστω $\mathbf{f:[0,1]\to R}$, μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[0,1]}$, με $\mathbf{f(0)=0}$. Αν υπάρχει $\mathbf{M>0}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{|f'(x)|\leq M|f(x)|}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$, αποδείξτε ότι $\mathbf{f(x)=0}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$.

Λύση

Έστω $g:[0,1]\to R$ με $g(x)=f^2(x)$

$g'(x) = 2f(x)f'(x)$, $g(0) = f^2(0) = 0$

$|g'(x)| = 2|f(x)||f'(x)| \leq 2Mf^2(x) = 2M|g(x)|$

Έστω $h:[0,1]\to R$ με $h(x) = e^{-2Mx}g(x)$

$h'(x) = -2Me^{-2Mx}g(x)+e^{-2Mx}g'(x) = e^{-2Mx}[g'(x)-2Mg(x)] \leq 0$

Άρα h είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ και $h(x) \leq h(0) = 0$.

Όμως $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Συνεπώς $h(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$

Άρα $g(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

ΘΕΜΑ 96

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και παρα-

γωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)<f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f'(c)>0$.

Λύση

Έστω ότι δεν υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)>0$.
Τότε για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)\leq 0$.
Συνεπώς η f είναι φθίνουσα στο (α,β).
Άρα για $\alpha<\beta$ είναι $f(\alpha)\geq f(\beta)$ άτοπο, διότι $f(\alpha)<f(\beta)$.

ΘΕΜΑ 97

Έστω $E\subseteq R$ και $f:E\rightarrow R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο E. Αν υπάρχουν $g,h:E\rightarrow R$ τέτοιες, ώστε $f'og=f'oh \Rightarrow g=h$, αποδείξτε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι η $f':E\rightarrow R$ είναι "1-1". Υποθέτουμε ότι η f' δεν είναι "1-1". Τότε υπάρχουν $y_1,y_2\in E$, $y_1\neq y_2$ με $f'(y_1)=f'(y_2)$
Έστω $F=\{x\}$, με την ιδιότητα ότι $g:F\rightarrow E$ $g(x)=y_1$, $h:F\rightarrow E$, με $h(x)=y_2$. Έχουμε $f'og=f'oh$ και $g\neq h$ (άτοπο).
Άρα η f' είναι "1-1" και επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη η f' είναι συνεχής. Άρα η f' είναι συνεχής και "1-1" οπότε είναι γν. μονότονη στο E. Επειδή η f' είναι γν. μονότονη έχουμε $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in E$, οπότε η f δεν έχει σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 98

Έστω $f:R\rightarrow R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη και φραγμένη τέτοια,

ώστε $f(x)f'(x) \geq \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Λύση

Έστω $g(x) = f^2(x) + 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$

$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\eta\mu x = 2[f(x)f'(x) - \eta\mu x] \geq 0$

Άρα η g είναι αύξουσα.

Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει M>0 τέτοιο, ώστε $|f(x)| < M$, για κάθε $x \in R$.

Άρα $|g(x)| = |f^2(x) + 2\sigma\upsilon\nu x| \leq f^2(x) + |2\sigma\upsilon\nu x| < M^2 + 2$ για κάθε $x \in R$

Συνεπώς η g είναι φραγμένη.

Επειδή η g είναι αύξουσα και φραγμένη υπάρχουν

$\lim_{x \to \infty} g(x)$ και $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Τότε αφού

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}[g(x) - f^2(x)]$$

προκύπτει ότι υπάρχει $\lim_{x \to \infty} \sigma\upsilon\nu x$ (άτοπο).

Άρα δεν υπάρχει $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ 99

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

(i) Να δείξετε ότι η **f** είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$ και φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

(ii) Να βρεθεί $f([-1,1])$.

(iii) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2-2x+2} \quad \text{όταν} \quad x \to \pm\infty$$

(iv) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η **g**.

Λύση

(i) $x^2+2x+2>0$ για κάθε $x\in R$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

$$[f(x)]^2 = x^2+2x+2+x^2-2x+2+2\sqrt{(x^2+2)^2-4x^2} =$$

$$= 2x^2+4+2\sqrt{x^4+4x^2+4-4x^2} = 2x^2+4+2\sqrt{x^4+4}$$

$$[(f(x))^2]' = 4x+2\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+4}} = 4x\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^4+4}}\right)$$

Άρα $[(f(x))^2]' \geq 0$ αν $x\geq 0$ και $[(f(x))^2]' \leq 0$ αν $x\leq 0$

Συνεπώς $[f(x)]^2$ είναι αύξουσα όταν $x\geq 0$ και φθίνουσα όταν $x\leq 0$.

Έστω $0 \leq x_1 \leq x_2$.

Τότε $[f(x_1)]^2 \leq [f(x_2)]^2 \Rightarrow [f(x_1)]^2 - [f(x_2)]^2 \leq 0$

$$[f(x_1)-f(x_2)]\underbrace{[f(x_1)+f(x_2)]}_{>0} \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Συνεπώς η f είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$.

Έστω $x_1 < x_2 \leq 0$.

Τότε $[f(x_1)]^2 \geq [f(x_2)]^2 \Rightarrow [f(x_1)]^2 - [f(x_2)]^2 \geq 0$

$$[f(x_1)-f(x_2)]\underbrace{[f(x_1)+f(x_2)]}_{>0} \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Συνεπώς η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

(ii) Η f είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$ και φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y,

διότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Επίσης $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f παίρνει τη μικρότερη τιμή όταν $x=0$, δηλαδή

$$f_{min}=f(0)=2\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(1) = f(-1) = \sqrt{5}+1$$

Άρα $f([-1,1]) = f([-1,0])\cup f([0,1]) = f([0,1]) = [2\sqrt{2}, \sqrt{5}+1]$

(iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2+2x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=-2$$

(iv) $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}$

Αν $x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+2}>\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow g(x)>0$

Αν $x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+2}<\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow g(x)<0$

$$[g(x)]^2 = x^2+2x+2+x^2-2x+2-2\sqrt{x^4+4} = 2x^2+4-2\sqrt{x^4+4}$$

$$[(g(x))^2]' = 4x-2\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+4}}=$$

$$=4x\frac{\sqrt{x^4+4}-x^2}{\sqrt{x^4+4}}=\frac{16x}{\sqrt{x^4+4}\,(\sqrt{x^4+4}+x^2)}$$

Άρα όταν $x\geq 0 \Rightarrow [(g(x))^2]'\geq 0 \Rightarrow (g(x))^2$ είναι αύξουσα.

Έστω $0\leq x_1\leq x_2$.

Τότε $[g(x_1)]^2\leq[g(x_2)]^2 \Rightarrow [g(x_1)-g(x_2)]\underbrace{[g(x_1)+g(x_2)]}_{>0}\leq 0 \Rightarrow$

$g(x_1)<g(x_2)$. Η g είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$.

Όταν $x\leq 0 \Rightarrow [(g(x))^2]'\leq 0 \Rightarrow (g(x))^2$ είναι φθίνουσα.

Έστω $x_1<x_2\leq 0$.

Τότε $[g(x_1)]^2\geq[g(x_2)]^2 \Rightarrow [g(x_1)-g(x_2)]\underbrace{[g(x_1)+g(x_2)]}_{<0}\geq 0 \Rightarrow$

$g(x_1)-g(x_2)<0 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$.

Η g είναι αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

ΘΕΜΑ 100

Αν $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, αποδείξτε ότι:

$$\varepsilon\varphi^2 \alpha_1 \cdot \varepsilon\varphi^2 \alpha_2 \le \left(\frac{\eta\mu^2\alpha_1 + \eta\mu^2\alpha_2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha_1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha_2}\right)^2$$

Λύση

Έστω $f(x) = \ln\frac{x}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)}, \quad f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \le 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Συνεπώς η f είναι κοίλη, οπότε $f(x_1) + f(x_2) \le 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \le 2\ln\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \le 2\ln\frac{x_1+x_2}{2-x_1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \le \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2-x_1-x_2}\right)^2$$

Θέτουμε $x_1 = \eta\mu^2\alpha_1$, $x_2 = \eta\mu^2\alpha_2$ οπότε έχουμε

$$\frac{\eta\mu^2\alpha_1 \cdot \eta\mu^2\alpha_2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha_2} \le \left(\frac{\eta\mu^2\alpha_1 + \eta\mu^2\alpha_2}{2-\eta\mu^2\alpha_1-\eta\mu^2\alpha_2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2 \alpha_1 \cdot \varepsilon\varphi^2 \alpha_2 \le \left(\frac{\eta\mu^2\alpha_1 + \eta\mu^2\alpha_2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha_1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha_2}\right)^2$$

ΘΕΜΑ 101

Αποδείξτε ότι για $\mathbf{0<\alpha<\beta}$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{2}{\alpha+\beta} < \frac{1}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \quad (1)$$

Λύση

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta} < \ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)}{\frac{\beta}{\alpha}+1} < \ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

Θα δείξουμε ότι *(2)* $\dfrac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x>1$

Έστω $F(x) = \ln x - 2\dfrac{x-1}{x+1}$, $x>1$

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} > 0$$

οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\infty)$. Άρα $F(x)>F(1)=0$

οπότε $\dfrac{2(x-1)}{x+1} < \ln x$

Έστω $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x$, $x>1$

$$\varphi'(x) \quad \frac{1}{2x\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 > 1 \quad \text{για} \quad x>1$$

οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\infty)$, οπότε $\varphi(x)>\varphi(1)=0$ και

συνεπώς $\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

Αν στη *(2)* θέσουμε $x=\dfrac{\beta}{\alpha}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση.

ΘΕΜΑ 102

Δίνεται πραγματική συνάρτηση **g**, δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R**, τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)g(x)-(g'(x))^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) η συνάρτηση $\dfrac{g'}{g}$ είναι γν. αύξουσα.

(ii) $g\left(\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2}\right)\leq\sqrt{g(x_1)\,g(x_2)}$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

(Γενικές, Ιούνιος 1997)

Λύση

(i) Έχουμε $\left(\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{g''(x)\,g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)}>0$

1ος τρόπος

(ii) Θεωρούμε $h(x)=\ln g(x)\ \Rightarrow\ h'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\ \Rightarrow\ h''(x)>0$

αρα η h στρέφει τα κοίλα άνω, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x_1)+h(x_2)\geq 2h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln g(x_1)+\ln g(x_2)\geq 2\ln g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln g(x_1) + \ln g(x_2) \geq 2 \ln g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

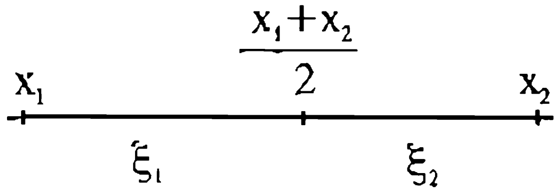
$$\Leftrightarrow \quad \ln g(x_1)\, g(x_2) \geq \ln\left(g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x_1)\, g(x_2) \geq g^2\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)\, g(x_2)}$$

2ος τρόπος

(ii) Θεωρούμε $h(x)=\ln g(x)$ που είναι γν. αύξουσα από το πρώτο ερώτημα. Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.



Στα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ έχουμε

$$h'(\xi_1) = \frac{\ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \ln g(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{2\ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - 2\ln g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$h'(\xi_1) = \frac{\ln g(x_2) - \ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2\ln g(x_2) - 2\ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ και h' γν. αύξουσα προκύπτει

$$h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \ln g(x_1) + \ln g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln g^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \ln g(x_1) g(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad g^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < g(x_1)\, g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \sqrt{g(x_1)\, g(x_2)}$$

* Για $x_1 = x_2$ ισχύει το ίσο.

ΘΕΜΑ 103

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{x_0}{\nu} < \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{x_0+\nu} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq 1\ ,\ \nu \in N\ .$$

Λύση

Έστω $f:(0,\infty)\to R$, με $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(x+1)-x\ln x\,(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{\left(\ln x+x\dfrac{1}{x}\right)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)\ln x+(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2} \quad \text{όπου} \quad g(x)=\ln x+x+1\ ,\ x>0$$

$$g'(x) = (\ln x+x+1)' = 1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>0 \quad \text{για} \quad x>0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty\ ,\quad g(1)=2>0$$

Άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $g(x) < g(x_0) = 0$, για κάθε $x\in(0,x_0)$.

Άρα $f'(x)<0$, για $x\in(0,x_0)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0)$.

Όμως $\dfrac{x_0}{\nu+1}<\dfrac{x_0}{\nu}$ οπότε

$$f\left(\frac{x_0}{\nu+1}\right)>f\left(\frac{x_0}{\nu}\right) \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x_0}{\nu+1}\ln\dfrac{x_0}{\nu+1}}{\dfrac{x_0}{\nu+1}+1}>\frac{\dfrac{x_0}{\nu}\ln\dfrac{x_0}{\nu}}{\dfrac{x_0}{\nu}+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0 \ln\frac{x_0}{\nu+1}}{x_0+\nu+1} > \frac{x_0 \ln\frac{x_0}{\nu}}{x_0+\nu} \Leftrightarrow \frac{\ln\frac{x_0}{\nu+1}}{x_0+\nu+1} > \frac{\ln\frac{x_0}{\nu}}{x_0+\nu} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_0}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{x_0+\nu+1}} > \ln\left(\frac{x_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{x_0+\nu}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x_0}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{x_0+\nu+1}} > \left(\frac{x_0}{\nu}\right)^{\frac{1}{x_0+\nu}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x_0}{\nu+1}\right)^{x_0+\nu} > \left(\frac{x_0}{\nu}\right)^{x_0+\nu+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0}{\nu} < \left(\frac{\frac{x_0}{\nu+1}}{\frac{x_0}{\nu}}\right)^{x_0+\nu} \Leftrightarrow \frac{x_0}{\nu} < \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{x_0+\nu}$$

ΘΕΜΑ 104

Αν $0<x\leq y\leq z$, αποδείξτε ότι $x^{y-z}y^{z-x}z^{x-y}\geq 1$. Πότε έχουμε ισότητα;

Λύση

Έστω $\frac{y}{x}=u$, $\frac{z}{x}=v$ οπότε $y = ux$, $z = vx$

Από την υπόθεση έχουμε $1 \leq u \leq v$

$$x^{y-z}\, y^{z-x}\, z^{x-y} \geq 1 \Leftrightarrow x^{(u-v)x}(ux)^{(v-1)x}(vx)^{(1-u)x} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$x(u-v)\ln x+(v-1)x(\ln u+\ln x)+(1-u)x(\ln v+\ln x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(v-1)\ln u \geq (u-1)\ln v \quad (1)$$

Αν $u=1$ $(x=y)$ ή $u=v$ η *(1)* είναι ισότητα

Έστω ότι $1<u<v$. Η *(1)* γράφεται:

$$\frac{\ln u}{u-1} \geq \frac{\ln v}{v-1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f:(1,\infty)\to R$ με $f(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}$.

Είναι $f'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}(t-1)-\ln t}{(t-1)^2}$

Έστω $g(t)=\dfrac{t-1}{t}-\ln t$, $t\geq 1$

$g'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t^2}<0$,για $t>1$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\infty)$

t	1		∞
$g'(t)$	0	$-$ $-$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Έχουμε $g(t)<0$, για κάθε $t>1$, οπότε $f'(t)<0$, για κάθε $t>1$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\infty)$.

Συνεπώς αφού $1<u<v$, είναι $\dfrac{\ln u}{u-1}\geq\dfrac{\ln v}{v-1}$

ΘΕΜΑ 105

Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x\geq 2}$ ισχύει η ανισότητα:

$$(x+1)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x+1}-x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}>1$$

Λύση

Έστω $f:[2,\infty]\to R$ με $f(t)=t\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{t}$

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]\subset[2,\infty[$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$. Άρα βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c_x\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x+1)-f(x)=f'(c_x) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{c_x}+\frac{\pi}{c_x}\eta\mu\frac{\pi}{c_x} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x+1}-x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{c_x}+\frac{\pi}{c_x}\eta\mu\frac{\pi}{c_x}$$

Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{t}+\frac{\pi}{t}\eta\mu\frac{\pi}{t}>1$, όταν $t>2$, δηλαδή

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2t}-1+\frac{2\pi}{t}\eta\mu\frac{\pi}{2t}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2t}>1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\pi}{t}\eta\mu\frac{\pi}{2t}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2t}>2\eta\mu^2\frac{\pi}{2t} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\pi}{2t}<\frac{\pi}{t}$$

Έστω $g:[2,\infty]\to R$ με $g(t)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2t}-\frac{\pi}{t}$

$$g'(t)=\frac{-\frac{\pi}{2t^2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2t}}+\frac{\pi}{t^2}=\frac{\pi}{t^2}\left(1-\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2t}}\right)=\frac{\pi}{t^2}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{t}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2t}}>0 \quad \text{όταν} \quad t>2$$

Για $t<\nu\in N^*$ είναι $g(t)<g(\nu)$ και επειδή

$$\lim_{\nu\to\infty} g(t)<\lim_{\nu\to\infty} g(\nu)=0 \quad \text{είναι} \quad g(t)<0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\pi}{2t}<\frac{\pi}{t}$$

ΘΕΜΑ 106

Αποδείξτε ότι $\mathbf{1-\frac{1}{\alpha+2}<\ln(\alpha+2)<\alpha+1}$ όταν $\mathbf{\alpha>-1}$.

Λύση

Έστω $f(x)=\ln(x+2)$, $x\in[-1,\alpha]$, $\alpha>-1$ δοσμένο.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,\alpha)$, οπότε βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(-1,\alpha)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)-f(-1)}{\alpha+1}=f'(c) \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+2)-\ln 1}{\alpha+1}=\frac{1}{c+2} \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+2)}{\alpha+1}=\frac{1}{c+2}$$

Επειδή $-1<c<\alpha$, είναι $\dfrac{1}{c+2}<\dfrac{1}{-1+2}=1$

Άρα $\dfrac{1}{\alpha+2}<\dfrac{\ln(\alpha+2)}{\alpha+1}<1$, $\alpha+1>0$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+2}<\ln(\alpha+2)<\alpha+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$1-\frac{1}{\alpha+2}<\ln(\alpha+2)<\alpha+1 \quad ,\alpha>-1$$

ΘΕΜΑ 107

Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ και η μικρότερη τιμή του $\boldsymbol{\beta}$ έτσι,

ώστε: $\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}}\right)^{\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\alpha}} \leq \mathbf{e} \leq \left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}}\right)^{\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\beta}}$ για κάθε $\boldsymbol{\nu}\in \mathbf{N}$.

Λύση

Έστω $\varphi:R\rightarrow R$, τέτοια ώστε

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+\varphi(\nu)}=e \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\nu)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}-\nu$$

$$\varphi'(\nu)=\frac{1}{(\nu^2+\nu)\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}-1$$

Θα αποδείξουμε ότι $\ln(1+\alpha)<\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}$ *(1)* $\alpha>0$

Θέτουμε $\sqrt{\alpha+1}=z>1$, οπότε η *(1)* γράφεται

$$\ln z^2<\frac{z^2-1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln z<\frac{z^2-1}{z}$$

Έστω $h(z)=z^2-1-2z\ln z$

$$h'(z)=2z-2\ln z-2$$

$$h''(z) = 2 - \frac{2}{z} = \frac{2(z-1)}{z} > 0 \quad \text{για} \quad z>1$$

Συνεπώς η h΄ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $h'(z)>h'(1)=0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $h(z)>h(1)=0$.

Συνεπώς $h(z)>0$, για κάθε $z>1$, οπότε η *(1)* αληθεύει.

Από την *(1)* έχουμε

$$(\alpha+1)\ln^2(\alpha+1) < \alpha^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\nu}+1\right)\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu+1}{\nu}\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu^2} \Leftrightarrow \nu(\nu+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < 1$$

$$\varphi'(\nu) = \frac{1-(\nu^2+\nu)\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\nu(\nu+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} > 0$$

οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο N. Άρα

$$\varphi(\nu) \ge \varphi(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1 = \frac{1-\ln 2}{\ln 2}$$

Άρα $\alpha = \varphi(1) = \frac{1-\ln 2}{2}$ και $\beta = \lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi(\nu) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\nu\to\infty}\varphi(\nu) = \lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} - \nu\right] =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\frac{1-\nu\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 108

Έστω **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να είναι παράλληλη

στην ευθεία $y=-x$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=-1$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=f(x)+x$
Ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha)+\alpha=\alpha+\beta \\ h(\beta) &= f(\beta)+\beta=\alpha+\beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$h(\alpha)=h(\beta)$ Σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε
$h'(x_0)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)+1=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)=-1$

ΘΕΜΑ 109

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\mathbf{2^\nu \cdot x^{\nu+1} - 2 \cdot 2^\nu x + x + 2^\nu - 1 = 0}$

$\mathbf{\nu \in N}$, $\mathbf{0 < x < 1}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbf{(0,1)}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $h(x)=2^\nu \cdot x^{\nu+1}-2\cdot 2^\nu x+x+2^\nu-1$

Έχουμε $h(\frac{1}{2})=2^\nu\cdot\frac{1}{2^{\nu+1}}-2^{\nu+1}\frac{1}{2}+2^\nu-1+\frac{1}{2}=0$

Σχήμα Horner:

2^ν	0	0	...	$1-2^{\nu+1}$	$2^\nu-1$	½
	$2^{\nu-1}$	$2^{\nu-1}$	...	1	$1-2^\nu$	
2^ν	$2^{\nu-1}$	$2^{\nu-2}$	...	$2-2^{\nu+1}$	0	

Το πηλίκο είναι $g(x)=2^\nu\cdot x^\nu+2^{\nu-1}\cdot x^{\nu-1}+\ldots+2-2^{\nu+1}$

Άρα $h(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)g(x)$

επίσης $g'(x)=\nu\, 2^\nu\cdot x^{\nu-1}+(\nu-1)\,2^{\nu-1}\cdot x^{\nu-2}+\ldots+2>0$, $0<x<1$
άρα η g γνησίως αύξουσα δηλαδή $g(0) < g(x) < g(1)$ 0.

Επομένως η h(x) έχει μοναδική λύση στο (0,1).

ΘΕΜΑ 110

(i) Αποδείξτε ότι $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} < x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$

για κάθε **x>0**.

(ii) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{\nu}\left(1+\frac{m^k}{n^{k+1}}\right)^{1+\frac{m^k}{n^{k+1}}}$

όταν **k≠-1**.

Λύση

Έστω με $f(x) = x\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ln(x+1)$, ( )

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1} - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} - 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1}{x+1} + (x-1) = \frac{1+x^2-1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} > 0 \text{ για } x>0,$$

$f''(0)=0$

x	0			∞
f''(x)	0	+	+	
f'(x)	0	↗		
f(x)	0	↗		

Άρα $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,\infty)$ και $f(x)>0$ για $x>0$.
Όμοια αποδεικνύεται η δεύτερη ανισότητα παίρνοντας

$$g(x) = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}$$

(ii) Η (i) γράφεται $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<\ln(1+x)^{1+x}<x+\frac{x^2}{2}$

Θέτουμε $x=\frac{m^k}{n^{k+1}}$ και έχουμε

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m^k}{n^{k+1}}+\frac{m^{2k}}{2n^{2k+1}}-\frac{m^{3k}}{6n^{3k+3}}\right)<\sum_{m=1}^{n}\ln\left(1+\frac{m^k}{n^{k+1}}\right)^{1+\frac{m^k}{n^{k+1}}}<$$

$$<\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m^k}{n^{k+1}}+\frac{m^{2k}}{2n^{2k+2}}\right)$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{\nu}\frac{m^k}{n^{k+1}}=\int_0^1 x^k\,dx=\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\frac{1}{k+1}$

οπότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{\nu}\ln\left(1+\frac{m^k}{n^{k+1}}\right)^{1+\frac{m^k}{n^{k+1}}}=\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow$

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{\nu}\left(1+\frac{m^k}{n^{k+1}}\right)^{1+\frac{m^k}{n^{k+1}}}=e^{\frac{1}{k+1}}$$

ΘΕΜΑ 111

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$f_\alpha:[0,\infty)\to[0,\infty)$ με $f_\alpha(x)=(1+\alpha)^x-\alpha^x$, όπου $\alpha>0$.

(ii) Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{1988^x-1987^x=1+3\left(1987^{x/3}+1987^{2x/3}\right)}$$

Λύση

(i) Για $\alpha\in(0,1)$ η συνάρτηση $g(x) = (1+\alpha)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$ και η συνάρτηση $h(x)=-\alpha^x$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $f_\alpha(x)=h(x)+g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$, όταν $\alpha\in(0,1)$ *(1)*

Για $\alpha\in[1,\infty)$, είναι $f_\alpha(x)=(1+\alpha)^x-\alpha^x = \alpha^x\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x-1\right]$.

Επειδή $1+\frac{1}{\alpha}>1$ η συνάρτηση $g_1(x)=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x$ είναι γν. αύξουσα.

Όμως και η συνάρτηση $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x-1=g_2(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $[0,\infty)$ και $g_2(x)>0$ στο $[0,\infty)$.

Άρα $f_\alpha(x) = \alpha^x\, g_2(x)$ είναι γν. αύξουσα για $\alpha\geq1$. *(2)*

Από τις *(1)* και *(2)* προκύπτει ότι η f_α είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $[0,\infty)$.

(ii) Η εξίσωση γράφεται

$$1988^x=1987^{3\cdot x/3}+3\cdot1987^{x/3}+3\cdot1987^{2x/3}+1 \Leftrightarrow$$

$$1988^x=(1987^{x/3}+1)^3 \Leftrightarrow 1988^{x/3}=1987^{x/3}+1 \Leftrightarrow$$

$$f_{1987}\left(\frac{x}{3}\right)=1988^{x/3}-1987^{x/3}=1$$

Άρα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f_{1987}\left(\frac{x}{3}\right)=1$

Όμως η f_{1987} είναι γν. αύξουσα και για $x=3$ έχουμε

$f_{1987}(1)=1988-1987=1$

Άρα η $x=3$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 112

Αποδείξτε ότι: $(\eta\mu x)^{2^\nu}+(\sigma\upsilon\nu x)^{2^\nu}\geq 2^{1-2^{\nu-1}}$

Λύση

Έστω $f(x)=(\eta\mu x)^{2^{\nu}}+(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}}$

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left[\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2^{\nu}}+\left[\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2^{\nu}}=$$

$$=[\sigma\upsilon\nu x]^{2^{\nu}}+[-\eta\mu x]^{2^{\nu}}=(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}}+(\eta\mu x)^{2^{\nu}}=f(x)$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)=2^{1-2^{\nu-1}}$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=2^{\nu}\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)^{2^{\nu}-1}-2^{\nu}\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}-1}=$$

$$=2^{\nu}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left[(\eta\mu x)^{2^{\nu}-2}-(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}-2}\right]$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\ ,\ x_2=\frac{\pi}{4}\ ,\ x_3=\frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f′(x)	0	−	0	+	0
f(x)	1	↘	$2^{1-2^{\nu-1}}$	↗	1

Άρα $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{1-2^{\nu-1}} \Leftrightarrow (\eta\mu x)^{2^{\nu}}+(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}}\geq 2^{1-x^{\nu-1}}$, Ισότητα έχουμε για $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in z$

ΘΕΜΑ 113

Αν $\mathbf{x}\in\left[\mathbf{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$ αποδείξτε ότι: $\mathbf{2^{\eta\mu x}+2^{\varepsilon\varphi x}\geq 2^{x+1}}$.

Λύση

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{ημx+εφx}{2} \geq x \Leftrightarrow ημx+εφx-2x \geq 0$

Έστω $φ(x)=ημx+εφx-2x$

$$φ'(x)=συνx+\frac{1}{συν^2x}-2$$

$$φ''(x)=-ημx+\frac{2\,ημx}{συν^3x}=\frac{ημx}{συν^3x}(2-συν^3x)>0$$

Άρα φ΄ αύξουσα, οπότε $φ'(x) \geq φ'(0) = 0$

Συνεπώς η φ είναι αύξουσα, οπότε $φ(x) \geq φ(0)=0 \Leftrightarrow ημx+εφx-2x \geq 0$.

ΘΕΜΑ 114

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση **f**, ορισμένη στο **R**, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια, ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί **α** και **β** ώστε: $(e^{-2x}-1)f''(x)+(αe^{ημα}-βx^4)f'(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $ρ \neq 0$ ώστε $f'(ρ)=0$. Να εξετάσετε αν το $f(ρ)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης **f**.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$(e^{-2x}-1)f''(x)+(αe^{ημα}-βx^4)f'(x)=x$$

Για $x=ρ$ έχουμε

$$(e^{-2ρ}-1)f''(ρ)+(αe^{ημα}-βρ^4)f'(ρ)=ρ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{-2ρ}-1)f''(ρ)=ρ \Leftrightarrow f''(ρ)=\frac{ρ}{e^{-2ρ}-1}=-\frac{1}{2}\,\frac{-2ρ}{e^{-2ρ}-1}<0$$

διότι $\frac{e^x-1}{x}>0$ για $x \neq 0$.

Άρα το $f(ρ)$ είναι τοπικό μέγιστο.

ΘΕΜΑ 115

Να δειχθεί ότι αν $x \in \mathbb{R}^+$ τότε:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} > \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3}$$

$$(x+1)\sqrt[3]{x+1} + (x+2)\sqrt[3]{x+2} > x\sqrt[3]{x} + (x+3)\sqrt[3]{x+3}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,\infty)\to R$ με

$f(x) = (x+1)^m - x^m$, $m \in R^+$

$f'(x) = m(x+1)^{m-1} - mx^{m-1} = m[(x+1)^{m-1} - x^{m-1}]$

Αν $m-1>0$ δηλαδή $m>1$ $\Rightarrow$ $(x+1)^{m-1}>x^{m-1}$ $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ η f είναι γν. αύξουσα.

Αν $0<m<1$ $\Rightarrow$ $(x+1)^{m-1}<x^{m-1}$ $\Rightarrow$ $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ η f είναι γν. φθίνουσα.

Αν $0<m<1$ έχουμε $f(x)>f(x+2)$ $\Rightarrow$ $(x+1)^m - x^m > (x+3)^m - (x+2)^m$ $\Rightarrow$ $(x+1)^m + (x+2)^m > x^m + (x+3)^m$

Αν $m=\frac{1}{3}$ έχουμε $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} > \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3}$

Όταν $m>1$ $\Rightarrow$ $f(x)<f(x+2)$ $\Rightarrow$ $(x+1)^m - x^m < (x+3)^m - (x+2)^m$ $\Rightarrow$ $(x+1)^m + (x+2)^m < x^m + (x+3)^m$

Αν $m=\frac{4}{3}$ έχουμε $(x+1)^{4/3} + (x+2)^{4/3} > x^{4/3} + (x+3)^{4/3}$ $\Rightarrow$

$$(x+1)\sqrt[3]{x+1} + (x+2)\sqrt[3]{x+2} > x\sqrt[3]{x} + (x+3)\sqrt[3]{x+3}$$

ΘΕΜΑ 116

Να δειχθεί ότι αν $\alpha \geq 0$, $b \geq 0$, $x>u>v>y>0$ και $\sqrt{x} + \sqrt{y} =$

$\sqrt{\mathbf{u}}+\sqrt{\mathbf{v}}$ τότε $\sqrt{\alpha\mathbf{x}+\mathbf{b}}+\sqrt{\alpha\mathbf{y}+\mathbf{b}}\geq\sqrt{\alpha\mathbf{u}+\mathbf{b}}+\sqrt{\alpha\mathbf{v}+\mathbf{b}}$ *(1)*

Λύση

Αν $\alpha=0$ και $b=0$ η *(1)* είναι ισότητα.

Αν $\alpha,b\neq0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,c]\to R$ με

$$f(x)=\sqrt{x^2+b}+\sqrt{\alpha(c-x)^2+b}\ ,\quad \text{με}\quad c>0$$

$$f'(x)=\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+b}}-\frac{\alpha(c-x)}{\sqrt{\alpha(c-x)^2+b}}$$

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+b}}=\frac{\alpha(c-x)}{\sqrt{\alpha(c-x)^2+b}}\ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha^2x^2}{\alpha x^2+b}=\frac{\alpha^2(c-x)^2}{\alpha(c-x)^2+b}\ \Leftrightarrow$$

$$x^2\,\alpha(c-x)^2+x^2\,b=\alpha x^2(c-x)^2+b(c-x)^2\ \Leftrightarrow$$

$$x^2=(c-x)^2\ \Leftrightarrow\ x^2=c^2-2cx+x^2\ \Leftrightarrow\ x=\frac{c}{2}$$

είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Όμως $f'(0)=-\dfrac{\alpha c}{\sqrt{\alpha c^2+b}}<0$,συνεπώς $f'(x)<0$ όταν $x\in\left[0,\frac{c}{2}\right]$ και η

f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{c}{2}\right]$

$f'(c)=+\dfrac{\alpha c}{\sqrt{\alpha c^2+b}}>0$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[\frac{c}{2},c\right]$ και η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{c}{2},c\right]$.

Θέτουμε $c=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{u}+\sqrt{v}$, $\sqrt{x}>\sqrt{y}$, $\sqrt{u}>\sqrt{v}$ $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{x}\in\left[\frac{c}{2},c\right]\ \text{και}\ \ \sqrt{u}\in\left[\frac{c}{2},c\right]$$

Όμως $\sqrt{x}>\sqrt{u}\ \Leftrightarrow\ f(\sqrt{x})>f(\sqrt{u})\ \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\alpha x+b}+\sqrt{\alpha\,(c-\sqrt{x})^2+b}>\sqrt{\alpha u+b}+\sqrt{\alpha(c-\sqrt{u})^2+b}\ \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha x+b}+\sqrt{\alpha y+b}>\sqrt{\alpha u+b}+\sqrt{\alpha v+b}$$

Άρα $\sqrt{\alpha x+b}+\sqrt{\alpha y+b}\geq\sqrt{\alpha u+b}+\sqrt{\alpha v+b}$

ΘΕΜΑ 117

Να συγκριθούν οι αριθμοί: $A = \sqrt{5} + \sqrt[5]{5}$ και $B = \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,\infty)\to R$ με $f(x) = 5^{1/x} - 5^{1/(x+1)}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}5^{1/x}\ln 5 + \frac{1}{(x+1)^2}5^{1/(x+1)}\ln 5 =$$

$$= \ln 5\left[\frac{1}{(x+1)^2}\cdot 5^{1/(x+1)} - \frac{1}{x^2}\cdot 5^{1/x}\right]$$

Έχουμε $\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x^2}$ και $5^{1/(x+1)} < 5^{1/x}$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{(x+1)^2}\cdot 5^{1/(x+1)} < \frac{1}{x^2}\cdot 5^{1/x}$ $\Rightarrow$ $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\infty)$.

Άρα $f(2) > f(4)$ $\Leftrightarrow$ $5^{1/2} - 5^{1/3} > 5^{1/4} - 5^{1/5}$ $\Rightarrow$

$\sqrt{5} - \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{5} - \sqrt[5]{5}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{5} + \sqrt[5]{5} > \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{5}$ $\Rightarrow$ $A > B$.

ΘΕΜΑ 118

Να δείξετε ότι για $\mathbf{x > 0}$ ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

Λύση

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} =$$

$$= -\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+4x+1-4x^2-4x}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

Για $x>0$ έχουμε $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ οπότε έχουμε $f(x)<0$, για κάθε $x>0$

και $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x>0$

Έστω $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ για κάθε $x>0$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2(x^2+x)^{3/2}} - \frac{1}{x(1+x)} > 0 \quad \text{για } x>0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ οπότε $g(x)<0$, για κάθε $x>0$ και

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

ΘΕΜΑ 119

Να δείξετε ότι αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τότε (i) $\frac{\text{εφ}x}{x} > \frac{x}{\text{ημ}x}$

(ii) $\frac{\text{ημ}x + \text{εφ}x}{2} > x$ (iii) $\frac{3\,\text{συν}x}{1+2\text{συν}x} < \frac{\text{ημ}x}{x} < \frac{3}{4-\text{συν}x}$

Λύση

(i) Έστω η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\to R$ με $f(x) = εφx\,ημx - x^2$

$f'(x) = ημx(2+εφ^2x)-2x$

$f''(x) = συνx(2+εφ^2x)+2ημxεφx(1+εφ^2x)-2$

$f'''(x) = ημx(2+εφ^2x)(1+2εφ^2x)+4ημx\left(\frac{εφx}{συνx}\right)^2$

$f'''(x)>0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα

$f''(0)=0$, οπότε $f''(x)>f''(0)=0$

Αφού $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$.

Όμως $f'(0)=0$ οπότε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,\infty)$.

Όμως $f(0)=0$ οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,\infty)$ και $\frac{εφx}{x}>\frac{x}{ημx}$

(ii) Είναι $\frac{ημx+εφx}{2}>\sqrt{ημx\,εφx}>\sqrt{x^2}=x$

(iii) Αφού $\frac{εφx}{x}>\frac{x}{ημx} \Rightarrow \left(\frac{ημx}{x}\right)^2>συνx \Rightarrow \frac{ημx}{x}>\sqrt{συνx}$

Αν θέσουμε $\sqrt{συνx}=t$, η ανισότητα $\frac{3συνx}{1+2συνx}<\frac{ημx}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3συνx<(1+2συνx)\sqrt{συνx} \Leftrightarrow 9συν^2x<(1+2συνx)^2συνx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9συνx<(1+2συνx)^2 \Leftrightarrow 4συν^2x-5συνx+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2συνx-1)^2+συνx>0$ που ισχύει.

Έστω $f:\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\to R$ με $f(x)=4ημx-\frac{1}{2}ημ2x-3x$

$f'(x) = 4συνx-συν2x-3$

$f''(x) = -4ημx+2ημ2x = ημx\,(συνx-1) < 0$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα και $f'(x)<f'(0)=0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x)<f(0)=0$

οπότε $4ημx-\frac{1}{2}ημ2x-3x<0 \Rightarrow \frac{ημx}{x}<\frac{3}{4-συνx}$

ΘΕΜΑ 120

Να δείξετε ότι αν $x \in (0\,,1)$ τότε: $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x < e^{x}$

Λύση

Η πρώτη ανισότητα γράφεται

$$e^{\frac{x}{x+1}} < 1+x \;\Rightarrow\; \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) \;\Rightarrow\; \frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1) και $f(0)=0$

οπότε $f(x)<0$ και $e^{\frac{x}{x+1}} < 1+x$ για κάθε $x\in(0,1)$

Η δεύτερη ανισότητα γράφεται $\ln(1+x)<x$

Έστω $g(x) = \ln(x+1)-x$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = -\frac{x}{x+1} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα η g είναι φθίνουσα στο (0,1) και $g(0)=0$

οπότε $g(x)<0$, για κάθε $x\in(0,1)$ και $1+x<e^{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$

ΘΕΜΑ 121

Να δείξετε ότι αν: (i) $x \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ ημx + εφx > 2x

(ii) $x \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ εφx $> x + \frac{x^3}{3}$

(iii) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathbf{1 + \sigma\varphi x \leq \sigma\varphi \frac{x}{2}}$

(iv) $\alpha, b \in [0, \infty) \Rightarrow \mathbf{3\alpha^3 + 7b^3 \geq 9\alpha b^2}$

Λύση

(i) Έστω $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ με $f(x) = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 2x$

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$ ($\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$, αν $x = 0$)

Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) > f(0) = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu x + \varepsilon\varphi x > 2x$

(ii) Έστω $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ με $f(x) = \varepsilon\varphi x - x - \frac{x^3}{3}$

$$f'(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^{23} x - x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x - x^2 \sigma\upsilon\nu^{2x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Όμως για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $x \leq \varepsilon\varphi x \Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x \leq \eta\mu x \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu^2 x - x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) = 0$, όταν $x = 0$)

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $f(x) > f(0)$, για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\varepsilon\varphi x > x + \frac{x^3}{3}$

(iii) Έστω $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ με $f(x) = 1 + \sigma\varphi x - \sigma\varphi \frac{x}{2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{2\eta\mu^2 \frac{x}{2}} = \frac{-1 + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}}{\eta\mu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \geq 0$$

Άρα $f'(x) \geq 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 0$, όταν $x = \frac{\pi}{2}$

Συνεπώς η f είναι αύξουσα και $f(x) \le f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα $1 + \sigma\varphi x \ge \sigma\varphi \frac{x}{2}$

iv) Έστω $f(\alpha) = 3\alpha^3 + 7b^3 - 9\alpha b^2$

$f'(\alpha) = 9(\alpha - b)(\alpha + b)$

$f'(b) = 0$ και $f'(\alpha) < 0$ όταν $\alpha < b$ και $f'(\alpha) > 0$ αν $\alpha > b$

οπότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο (b, b^3)

Συνεπώς $f(\alpha) \ge f(b) = b^3 \ge 0$ και $3\alpha^3 + 7b^3 \ge 9\alpha b^2$

ΘΕΜΑ 122

Αποδείξτε ότι αν $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{2}}$ ισχύει η σχέση: $\mathbf{\eta\mu x > x\ \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}}$

Λύση

Έστω $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ με

$f(x) = \varepsilon\varphi x\ \eta\mu^2 x - x^3$

$f'(x) = \varepsilon\varphi^2 x + 2\eta\mu^2 x - 3x^2$

$f''(x) = \dfrac{2\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\eta\mu 2x - 6x$

$f'''(x) = 2\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu^4 x + 3\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x} + 4\sigma\upsilon\nu 2x - 6 = 2\varepsilon\varphi^4 x\ (3 + 4\sigma\upsilon\nu^2 x)$

$f'''(x) > 0$ για $x > 0$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f'$ γν. αύξουσα, οπότε $f'(x) > f'(0) = 0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow$

$\varepsilon\varphi x\ \eta\mu^2 x > x^3 \quad \eta\mu^3 x > x^3 \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\ \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}$

ΘΕΜΑ 123

Να δείξετε ότι αν $\alpha>b>0$, τότε για $\nu>1$ είναι $\nu b^{\nu-1}(\alpha-b)<\alpha^{\nu}-b^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-b)$ και για $\nu<1$ είναι $\nu b^{\nu-1}(\alpha-b)>\alpha^{\nu}-b^{\nu}>\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-b)$.

Λύση

Έστω $f:[\alpha,b]\to R$ με $f(x)=x^{\nu}$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο (α,b), οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $\alpha^{\nu}-b^{\nu} = f'(\xi)(\alpha-b)$.

Όμως $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ οπότε $\dfrac{\alpha^{\nu}-b^{\nu}}{\alpha-b}=\nu\,\xi^{\nu-1}$

Αν $\nu>1 \Rightarrow \nu-1>0$

Επίσης $b<\xi<\alpha \Rightarrow b^{\nu-1}<\xi^{\nu-1}<\alpha^{\nu-1} \Rightarrow \nu b^{\nu-1}<\xi^{\nu-1}\nu<\nu\alpha^{\nu-1}$

Άρα όταν $\nu>1 \Rightarrow \nu b^{\nu-1}<\dfrac{\alpha^{\nu}-b^{\nu}}{\alpha-b}<\nu\alpha^{\nu-1}$, δηλαδή

$\nu b^{\nu-1}(\alpha-b)<\alpha^{\nu}-b^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-b)$

Αν $\nu<1 \Rightarrow \nu-1<0$

Όμως $b<\xi<\alpha \Rightarrow b^{\nu-1}>\xi^{\nu-1}>\alpha^{\nu-1} \Rightarrow \nu b^{\nu-1}>\xi^{\nu-1}\nu>\nu\alpha^{\nu-1}$

Συνεπώς $\nu b^{\nu-1}>\dfrac{\alpha^{\nu}-b^{\nu}}{\alpha-b}>\nu\alpha^{\nu-1} \Rightarrow \nu(\alpha-b)b^{\nu-1}>\alpha^{\nu}-b_{\nu}>\nu(\alpha-b)\alpha^{\nu-1}$

ΘΕΜΑ 124

Αν $0<\alpha<b<\dfrac{\pi}{2}$ τότε ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon\varphi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu b)}{b-\alpha} < \varepsilon\varphi b$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to R$ με $f(x)=\ln\sigma\upsilon\nu x$

Είναι προφανές ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και παραγωγίσιμη στο (α,b). Άρα για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,b]$ οπότε $\exists\ \xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f(b)-f(\alpha)}{b-\alpha}=f'(\xi)$$

Όμως $f'(x)=\dfrac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\varepsilon\varphi x$

Άρα έχουμε $\dfrac{\ln\sigma\upsilon\nu b-\ln\sigma\upsilon\nu\alpha}{b-\alpha}=-\varepsilon\varphi\xi \Rightarrow \dfrac{\ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu b}{b-\alpha}=\varepsilon\varphi\xi$

Όμως η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

και αφού $0<\alpha<\xi<b<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha<\varepsilon\varphi\xi<\varepsilon\varphi b$

Συνεπώς $\varepsilon\varphi\alpha<\dfrac{\ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu b}{b-\alpha}<\varepsilon\varphi b$

ΘΕΜΑ 125

Έστω η συνάρτηση **$f:R\to R$** με **$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$**, με **$\alpha\neq 0$**. Αποδείξτε ότι αν τα ακρότατα της **f** βρίσκονται σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε ισχύει η σχέση **$\beta\gamma=9\alpha\delta$**.

Λύση

$f'(x) = 3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

$f'(x)=0 \quad x_1,x_2$

Έστω $P_1(x_1,f(x_1))$, $P_2(x_2,f(x_2))$ τα ακρότατα της f.

Έχουμε $x_1+x_2=-\dfrac{2\beta}{3\alpha}$, $x_1 x_2=\dfrac{\gamma}{3\alpha}$

Τα σημεία P_1 και P_2 βρίσκονται σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή σε μια ευθεία με εξίσωση $y=mx$

Άρα $f(x_1) = mx_1$, $f(x_2) = mx_2$ *(1)*

Από τις *(1)* βρίσκουμε $\dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{f(x_2)}{x_2} \Leftrightarrow x_2 f(x_1) = x_1 f(x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x_2(\alpha x_1^3 + \beta x_1^2 + \gamma x_1 + \delta) = x_1(\alpha x_2^3 + \beta x_2^2 + \gamma x_2 + \delta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) + \beta x_1 x_2 (x_1 - x_2) - \delta (x_1 - x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)\left[\alpha x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \beta x_1 x_2 - \delta\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \beta x_1 x_2 - \delta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \frac{\gamma}{3\alpha}\left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right) + \frac{\beta\gamma}{3\alpha} - \delta \quad \Leftrightarrow \quad 9\alpha\delta = \beta\gamma \, .$$

ΘΕΜΑ 126

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f(x) > 0}$ και ισχύει:

$\mathbf{f'(x) - f(x)\ln f(x) = 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$ με $\mathbf{f(1) = 1998}$.

Να βρεθεί ο τύπος της $\mathbf{f(x)}$.

Λύση

Έχουμε $f'(x) = f(x)\ln f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\ln f(x))' = \ln f(x)$$

Θέτουμε $\ln f(x) = h(x)$

επειδή $h'(x) = h(x) \Leftrightarrow h(x) = ce^x$

άρα $\ln f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = e^{ce^x}$

Για $x=1$ έχουμε $1998 = e^{ce} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ce = \ln 1998 \Leftrightarrow c = e^{-1}\ln 1998$

άρα $f(x) = e^{(\ln 1998)e^{x-1}}$

ΘΕΜΑ 127

Να δειχθεί ότι: $\eta\mu 50^\circ < \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{36}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[45^\circ, 50^\circ] \to R$ με $f(x) = \eta\mu x$.
Η f είναι συνεχής στο $[45^\circ, 50^\circ]$ και παραγωγίσιμη στο $(45^\circ, 50^\circ)$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στο $(45^\circ, 50^\circ)$.

Έχουμε $\dfrac{\eta\mu 50^\circ - \eta\mu 45^\circ}{50^\circ - 45^\circ} = f'(\xi)$, $\xi \in (45^\circ . 50^\circ)$

$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Άρα $\dfrac{\eta\mu 50^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}}{5^\circ} = \sigma\upsilon\nu\xi \Rightarrow \dfrac{\eta\mu 50^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}} = \sigma\upsilon\nu\xi$

Όμως $\sigma\upsilon\nu\xi < 1$, για κάθε $\xi \in (45, 50^\circ)$ οπότε έχουμε

$$\frac{\eta\mu 50^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}} < 1 \Rightarrow \eta\mu 50^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{36} \Rightarrow \eta\mu 50^\circ < \frac{\pi}{36} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ΘΕΜΑ 128

Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\pi < 3\sqrt{3}\,\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) < \pi\sqrt{3} < 6\sqrt{3}\,\ln\sqrt{3} < 2\pi \quad (1)$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]\to R$ με $f(x)=\ln\varepsilon\varphi x$. Γι' αυτή τ συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]$, οπότ υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\ln\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{12}-\ln\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}}{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}}=f'(\xi) \quad , \quad \xi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{\eta\mu 2x}$$

$$\ln\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{12}-\ln\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}\frac{2}{\eta\mu 2\xi}=\frac{\pi}{6\eta\mu 2\xi}$$

Όμως $\quad 2\xi\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu 2\xi\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu 2\xi}\in\left(\frac{2}{\sqrt{3}},2\right)$

$$\varepsilon\varphi^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 150^\circ}{1+\sigma\upsilon\nu 150^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}=(2+\sqrt{3})^2$$

$$\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{6}\frac{2}{\sqrt{3}}<\ln\frac{\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{12}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}}<\frac{\pi}{6}2 \Rightarrow \frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)<\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi<3\sqrt{3}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)<\sqrt{3}\,\pi}$$

Τώρα αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ έχουμε

$$\ln\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}-\ln\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \quad \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\frac{2}{\eta\mu 2x} \quad \frac{\pi}{6\eta\mu 2x}$$

Όμως $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \eta\mu 2x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu 2x} \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Άρα $\frac{\pi}{6} < \ln\frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\pi\sqrt{3} < 6\sqrt{3}\ln\sqrt{3} < 2\pi}$

Άρα η *(1)* ισχύει.

ΘΕΜΑ 129

Δίνεται μια συνάρτηση **f:R→R** συνεχής και παραγωγίσιμη στο **R**. Αν η **f′** είναι αύξουσα να δειχθεί ότι:

$$f'(x) \leq f(x+1) - f(x) \leq f'(x+1)$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [x,x+1] και παραγωγίσιμη στο (x,x+1), οπότε βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$$

Όμως η f′ είναι αύξουσα και $x<\xi<x+1$, οπότε

$$f'(x) \leq f'(\xi) \leq f'(x+1)$$

Συνεπώς $f'(x) \leq f(x+1)\text{-}f(x0 \leq f'(x+1)$

ΘΕΜΑ 130

Έστω η συνάρτηση **$f:[100,104] \to R$** με **$f(x) = \sqrt{x}$**. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. να δειχθεί ότι: **$\sqrt{104} - 10 < 0,2$**.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [100,104] και παραγωγίσιμη στο (100,104).

οπότε βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (100,104)$ τέτοιο, ώστε

$$f(104)-f(100) = 4f'(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Άρα $\sqrt{104} - \sqrt{100} = 4\,\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{\xi}}$

Όμως $\xi > 100 \;\Rightarrow\; \sqrt{\xi} > 10 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{10} \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{2}{10} = 0{,}2$

Συνεπώς $\sqrt{104} - 10 = \frac{2}{\sqrt{\xi}} < 0{,}2$ οπότε $\sqrt{104} - 10 < -0{,}2$

ΘΕΜΑ 131

Να δειχθεί ότι για κάθε $\mathbf{x} \in \left(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ ισχύει: $\mathbf{1} \le \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{ημx}} \le \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

Λύση

(1) Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $1 \le \frac{x}{ημx}$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$1 \le \frac{x}{ημx} \Leftrightarrow$ $ημx \le x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ($ημx > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ με $f(x) = x - ημx$, $f'(x) = 1 - συνx \ge 0$.

Άρα η f είναι αύξουσα, οπότε $f(x) \ge f(0)$ για $x \ge 0$. Συνεπώς έχουμε $x - ημx \ge 0$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $x \ge ημx$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Όμως $ημx > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε

$\frac{x}{ημx} \ge 1$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

(1)

(2) Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\frac{x}{\eta\mu x} \leq \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ με $g(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$

$$g'(x) = \frac{\eta\mu x - x\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

Έστω η συνάρτηση $h: \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ με $h(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$

Είναι $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x) = x\eta\mu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$h'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $h(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Συνεπώς $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{x}{\eta\mu x} \leq \frac{\pi}{2}}$ *(2)*

Από τις *(1)* και *(2)* προκύπτει ότι $1 \leq \frac{x}{\eta\mu x} \leq \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ 132

Να δειχθεί ότι όταν $x \in R_+^*$ τότε ισχύουν οι ανισότητες:

(i) $\ln x^2 \leq x^2 - 1$ *(1)* (ii) $\ln(1 + x) < x < e^x - 1$ *(2)*

Λύση

Αν x>1 έχουμε $(\ln x^2)'<(x^2-1)'$, οπότε $\ln x^2<x^2-1$

Αν $0<x<1$, θέτουμε $t=\frac{1}{x}$ οπότε $1<t<\infty$

Άρα ισχύει η ανισότητα $\left(\ln\frac{1}{t^2}\right)'<\left(\frac{1}{t^2}-1\right)'$ οπότε

$\ln\frac{1}{t^2}<\left(\frac{1}{t^2}-1\right)$ και $\ln x^2<x^2-1$

Συνεπώς $\ln x^2\leq x^2-1$, για κάθε $x\in R_+$

(ii) Αν $x>0$ έχουμε $(\ln(1+x))'<x'$ οπότε $\ln(1+x)<x$, για κάθε $x>0$.

Αν $x>0 \Rightarrow x'<(e^x-1)' \Rightarrow x<e^x-1$

Άρα για $x>0$ ισχύει $\ln(1+x)<x<e^x-1$

ΘΕΜΑ 133

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$

Λύση

Για $x>0 \Rightarrow \frac{2x}{2x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{x}{2x+1}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2x+1}<\frac{\pi}{2}$

Άρα $\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}>0$, για κάθε $x>0$

οπότε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)=+\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty} e^{\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}\overset{(\theta.\ \text{De l'Hospital}\ \frac{\infty}{\infty})}{=}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right]'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)'}{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{(2x+1)^2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2x+1}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{(2x+1)^2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2x+1}}\overset{(\theta.\ \text{De l'Hospital}\ \frac{0}{0})}{=}=$$

$$\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-4}{(2x+1)^3}}{-\frac{\pi}{(2x+1)^2}\cdot\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2x+1}\cdot\frac{1}{\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}=$$

$$=4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2x+1}}=4\cdot 0=0$$

Συνεπώς $\lim_{x\to\infty}\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}=e^0=1$

ΘΕΜΑ 134

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}\right)\right]^x$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>1$, $\beta>1$.

Λύση

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}}{2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}}{2}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}{2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}\cdot\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}{2}\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}{2}\cdot x}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}-2}{2}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha^{1/x}-1}{1/x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\beta^{1/x}-1}{1/x}\right)}$$

(θέτουμε $\frac{1}{x}=y\to 0$)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}\right)\right]^x=e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{\alpha^y-1}{y}+\lim\limits_{y\to 0}\frac{\beta^y-1}{y}\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln\alpha+\ln\beta)}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln(\alpha\beta)}=e^{\ln\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{\alpha\beta}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^{1/x}+\beta^{1/x}\right)\right]^x=\sqrt{\alpha\beta}$

ΘΕΜΑ 135

Δίνεται η συνάρτηση: $\mathbf{f(x) = εφx\,ημ^2x - x^3}$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Έχουμε $f'(x) = εφ^2x + 2ημ^2x - 3x^2$

$$f''(x) = \frac{2\,εφx}{συν^2x} + 2\,ημ\,2x - 6x$$

$$f'''(x) = 2\,\frac{συν^4x + 3\,ημ^2x\,συν^2x}{συν^6x} + 4\,συν\,2x - 6 = 2\,εφ^4x\,(3 + 4συν^2x) > 0$$

Άρα η $f'''(x) > 0$ για $x > 0$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $f''(x) > f''(0) = 0 \;\Rightarrow\;$ η f' γνησίως αύξουσα, οπότε $f'(x) > f'(0) = 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 136

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:(0,\infty)\to R}$ με $\mathbf{f(x) = (1+x)^{1/x}}$

(i) Να δειχθεί ότι η **f** είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Λύση

$$= \frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x) =$$

$$= \frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,x]\to R$ με $g(x) = \ln(1+x)$.
Η g είναι συνεχής στο $[0,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$, οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $\frac{\ln(x+1)-\ln 1}{x} = \frac{1}{\xi+1}$.

Όμως $\frac{1}{+x} < \frac{1}{\xi+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow x-(x+1)\ln(x+1) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$, για κάθε $x>0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\infty)$.

(ii) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

ΘΕΜΑ 137

Έστω **f:R→R** μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο **R** και φραγμένη άνω. Αποδείξτε ότι αν η **f΄** είναι αύξουσα στο **R**, τότε η **f** είναι σταθερή.

Λύση

Επειδή η f είναι φραγμένη άνω, υπάρχει $\alpha\in R$ τέτοιο, ώστε $f(x)\le\alpha$, για κάθε $x\in R$.

Έστω $g,h:R\to R$ με $g(x)=f(x)-\alpha$, $h(x)=x$, $g'(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in R$, οπότε η g' είναι αύξουσα.

Άρα υπάρχουν $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to\infty} |h(x)|=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} |h(x)|=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)$

Για $x>0$ είναι $\frac{g(x)}{h(x)}\le 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)\le 0$

και επειδή η g' είναι αύξουσα έχουμε $g'(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

Για $x<0$ είναι $\frac{g(x)}{h(x)}\ge 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)\ge 0$

Άρα $g'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα $g'(x)=0$ και $g(x)=c \iff f(x)=\alpha+c=$ σταθερή

ΘΕΜΑ 138

Αποδείξτε ότι αν **$f:R\to R$** είναι μια συνάρτηση **4** φορές παραγωγίσιμη, με **$f(x)\ge 0$** για κάθε **$x\in R$** και **$f^{(4)}(x)\le 0$**, τότε υπάρχουν **$\alpha,\beta,\gamma\in R$** τέτοιοι, ώστε **$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$**.

Λύση

Επειδή $f^{(4)}(x)\le 0$, η $f^{(3)}$ είναι φθίνουσα, οπότε υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f''(x)}{6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{(3)}(x)}{6}\ge$$

$$\ge\lim_{x\to\infty}\frac{f^{(3)}(x)}{6}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

Επειδή f(x)≥0 , έχουμε

$$0 \geq \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^3} \geq \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} \geq 0$$

Άρα $f^{(3)} = 0 \Rightarrow f^{(2)} =$ σταθ., οπότε υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma \in R$ τέτοιοι, ώστε $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

ΘΕΜΑ 139

Αποδείξτε ότι αν $f\text{:}R \to R$ με $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ και $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$,

τότε η **f** δεν μπορεί να είναι ρητή συνάρτηση.

Λύση

Έστω ότι $f(x) = \dfrac{\alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu}}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m}$

$$f'(x) = \frac{(\alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu})'\,(\beta_0 x^m + \ldots + \beta_m) - (\alpha_0 x^{\nu} + \ldots + \alpha_{\nu})\,(\beta_0 x^m + \ldots + \beta_m)'}{(\beta_0 x^m + \ldots + \beta_m)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0\,\beta_0\,(\nu - m)\,x^{\nu+m-1} + \ldots}{(\beta_0 x^m + \ldots + \beta_m)^2}$$

Όμως $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ οπότε $\nu \geq m+1 \Leftrightarrow \nu+m-1 \geq 2m$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \to \infty} f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0\,(\nu - m)}{\beta_0}, & \nu = m+1 \\ \pm \dfrac{\alpha_0}{\beta_0} \cdot \infty, & \nu > m+1 \end{cases}$$

δηλαδή $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) \neq 0$ (άτοπο)

ΘΕΜΑ 140

Έστω $f:R \to R$ μια συνάρτηση με f'' συνεχής στο R. Αν $f(x+y)f(x-y) \le f^2(x)$, για κάθε $x,y \in R$, αποδείξτε ότι $f(x)f''(x) \le f'^2(x)$, για κάθε $x \in R$.

Λύση

Θεωρούμε x-σταθερό και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(y) = f(x+y)f(x-y)-f^2(x) , \quad y\in R$$

$$g'(y) = f'(x+y)f(x-y)-f(x+y)f'(x-y)$$

$$g''(y)= f''(x+y)f(x-y)-f'(x+y)f'(x-y)-f'(x+y)f'(x-y)+f(x+y)f''(x-y)=$$

$$= f''(x+y)f(x-y)-2f'(x+y)f'(x-y)+f(x+y)f''(x-y)$$

$$g(0)=g'(0)=0 \quad \text{και} \quad g''(0) = 2[f(x)f''(x)-f'^2(x)]$$

Άρα $g(y) \le g(0)=0$, για κάθε $y\in R$

Συνεπώς η g έχει τοπικό μέγιστο στο y=0.

Συνεπώς $g''(0) \le 0 \iff f(x)f''(x) \le f'^2(x)$

ΘΕΜΑ 141

Έστω $P(x)=0$ με ρίζες $x_i \neq 0$ $(i=1,2,...,\nu)$ όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(i) $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{x_i} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$ (ii) $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{x_i^2} = \left[\frac{P'(0)}{P(0)}\right]^2 - \frac{P''(0)}{P(0)}$$

(iii) $$\sum_{i<j} \frac{1}{x_i x_j} = \frac{1}{2}\frac{P''(0)}{P(0)}$$

Λύση

(i) $P(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_\nu)$

$P'(x)=\alpha[(x-x_2)..(x-x_\nu)+(x-x_1)(x-x_3)..(x-x_\nu)+..+(x-x_1)(x-x_2)..(x-x_{\nu-1})]$

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_\nu}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x-x_i}$$

Άρα $\displaystyle\frac{P'(0)}{P(0)}=\sum_{i=1}^{\nu}\left(-\frac{1}{x_i}\right)=-\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x_i}$

οπότε $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x_i}=-\frac{P'(0)}{P(0)}$

(ii) $$\frac{P''(x)}{P(x)}-\left[\frac{P'(x)}{P(x)}\right]^2=\sum_{i\neq j}\frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)}-\left[\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x-x_i}\right]^2$$

Άρα $$\frac{P''(0)}{P(0)}-\left[\frac{P'(0)}{P(0)}\right]^2=\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i x_j}-\left[\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{-x_i}\right]^2=$$

$$=\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i x_j}-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}\right)^2=\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x_i^2}$$

(iii) $$\frac{P''(x)}{P(x)}=\sum_{i\neq j}\frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)}=2\sum_{i<j}\frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)}$$

Άρα $$\frac{P''(0)}{P(0)}=2\sum_{i<j}\frac{1}{x_i x_j}\Leftrightarrow\sum_{i<j}\frac{1}{x_i x_j}=\frac{1}{2}\frac{P''(0)}{P(0)}$$

ΘΕΜΑ 142

Έστω **f:R→R** μια συναρτηση παραγωγίσιμη στο **R**, με **f′** συνεχή στο **1** και **f′(1)≠0**. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\mathbf{L=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}-f(1)}{f(x)\,\sigma\upsilon\nu\,\pi x+f(1)}}$$ είναι ανεξάρτητο της **f**.

Λύση

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{[f(x)-f(1)]\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}+f(1)\left[\eta\mu\frac{\pi x}{2}-1\right]}{[f(x)-f(1)]\,\sigma\upsilon\nu\pi x+f(1)\,[\sigma\upsilon\nu\pi x+1]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}+f(1)\,\frac{\eta\mu\frac{\pi x}{2}-1}{x-1}}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\,\sigma\upsilon\nu\pi x+f(1)\,\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x+1}{x-1}}$$

Είναι $\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\frac{\pi x}{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\frac{\pi x}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{2}}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}(x-1)}{\frac{\pi}{4}(x-1)}\,\frac{\frac{\pi}{4}}{1}\lim_{x\to 1}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x-\sigma\upsilon\nu\pi}{x-1}=0$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2\,\eta\mu\frac{\pi(x-1)}{2}\cdot\eta\mu\frac{\pi(x+1)}{2}}{\frac{\pi}{2}(x-1)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{1}=0$$

Άρα $L=\frac{f'(1)}{-f'(1)}=-1$

ΘΕΜΑ 143

Μια ευθεία γραμμή τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\mathbf{y=\frac{1}{x}}$ στα σημεία **A** και **B** και την καμπύλη στα σημεία **P** και **Q**. Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{AP=BQ}$.

Λύση

Έχουμε:

σ: $xy = 1$ *(1)*

και

$\varepsilon: \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ *(2)*

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι άξονες x και y.

Έστω (x_1,y_1) και (x_2,y_2) είναι οι συντεταγμένες των P και Q αντίστοιχα.

Αντικαθιστούμε την $y=\frac{1}{x}$ στην *(2)* και έχουμε $x^2-\alpha x+\frac{\alpha}{\beta}=0$.

Αφού x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε $x_1+x_2 = \alpha$.

Αντικαθιστούμε την $x=\frac{1}{y}$ στην *(2)* και έχουμε $y^2-\beta y+\frac{\beta}{\alpha}=0$ και από αυτήν προκύπτει ότι $y_1+y_2 = \beta$.

Συνεπώς

$$AP^2=(x_1-\alpha)^2+y_1^2=(\alpha-x_2-\alpha)^2+(\beta-y_2)^2=x_2^2+(\beta-y_2)^2=BQ^2$$

ΘΕΜΑ 144

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση **f**, ορισμένη στο **R**, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια, ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθ-

μοί **α** και **β**, ώστε $f''(x)+(\alpha e^x-\beta^2x^6)f'(x)+f^2(x)=-e^{2000x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varrho\neq0$ ώστε $f'(\varrho)=0$. Να εξετάσετε αν το $f(\varrho)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης **f**.

Λύση

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $f''(x)+(\alpha e^x-\beta^2x^6)f'(x)+f^2(x)=-e^{2000x}$

Για $x=\varrho$ έχουμε $f''(\varrho)+(\alpha e^{\varrho}-\beta^2\varrho^6)f'(\varrho)+f^2(\varrho)=-e^{2000\varrho}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $f''(\varrho)+f^2(\varrho)=-e^{2000\varrho}$ αφού $f'(\varrho)=0$

οπότε $f''(\varrho)=-e^{2000\varrho}-f^2(\varrho)<0$ με $f'(\varrho)=0$

Άρα το $f(\varrho)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ΘΕΜΑ 145

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $g(x)=\ln x+e^{x^2}-2000^{1999}$ για κάθε $x>0$. Εκλέγουμε από το σύνολο $\Omega=\{1,2,\ldots,9\}$ ένα αριθμό **k** και μετά ένα αριθμό **λ** με επανατοποθέτηση. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε να ισχύει: $e^{k^2}-e^{\lambda^2}=\ln\frac{\lambda}{k}$

Λύση

Επειδή $g'(x)=\frac{1}{x}+2e^2>0$ για κάθε $x>0$ η g είναι γν. αύξουσα, άρα "ένα προς ένα".

Από την ισότητα $e^{k^2}-e^{\lambda^2}=\ln\frac{\lambda}{k}$ $\Leftrightarrow$ $e^{k^2}-e^{\lambda^2}=\ln\lambda-\ln k$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $e^{k^2}+\ln k=e^{\lambda^2}+\ln\lambda$ $\Leftrightarrow$ $g(k)=g(\lambda)$ $\Rightarrow$ $k=\lambda$

διότι η g είναι "ένα προς ένα".

Άρα η πιθανότητα που ζητείται είναι $P=\frac{9}{9^2}=\frac{1}{9}$

ΘΕΜΑ 146

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η f στρέφει τα κοίλα κάτω.

(ii) $\eta\mu\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{1}{2}(x_1+x_2)\sqrt{\frac{\eta\mu x_1}{x_1}\cdot\frac{\eta\mu x_2}{x_2}}$

Λύση

(i) Έχουμε $f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-\frac{1}{x}\Rightarrow$

$$f''(x)=(\sigma\varphi x)'+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\eta\mu^2 x-x^2}{x^2\eta\mu^2 x}<0$$

(διότι ημx<x για κάθε $x\in(0,\pi)$).

(ii) Επειδή $f''(x)<0$ ισχύει $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

άρα $\ln\frac{\eta\mu\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\geq\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\eta\mu x_1}{x_1}+\ln\frac{\eta\mu x_2}{x_2}\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\eta\mu\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2\geq\frac{\eta\mu x_1}{x_1}\,\frac{\eta\mu x_2}{x_2}\quad\Leftrightarrow$$

ΘΕΜΑ 147

ποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, $x\in \mathbb{R}$
ναι παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f(x+y)=f(y)g(x)+g(y)f(x)$$

$$g(x+y)=g(y)g(x)-f(y)f(x)$$

α κάθε $x,y\in \mathbb{R}$. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

) $f(0)=0$ και $g(0)=1$

i) Αν $f'(0)=1$ και $g'(0)=0$ τότε $f'(x)=g(x)$
και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$.

ύση

) Η σχέση $f(x+y)=f(y)g(x)+g(y)f(x)$ για $x=0$ και $y=0$ δίνει
$f(0)=2f(0)g(0)$ *(1)*
σχέση $g(x+y)=g(y)g(x)-f(y)f(x)$ για $x=0$ και $y=0$ δίνει
$g(0)=g^2(0)-f^2(0)$ *(2)*

πό την *(1)* προκύπτει ότι $f(0)=0$ ή $g(0)=\dfrac{1}{2}$

ν $g(0)=\dfrac{1}{2}$ η (2) δίνει $f^2(0)=-\dfrac{1}{4}<0$ που είναι αδύνατο αφού $f(x)$
ραγματική.

Ώστε πρέπει $f(0)=0$, οπότε η (2) δίνει $g(0)=g^2(0)$

δηλαδή $g(0)=0$ ή $g(0)=1$

Αν $g(0)=0$ επειδή $f(x)=f(0)g(x)+g(0)f(x) \Rightarrow f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άτοπο από την υπόθεση.

Άρα $f(0)=0$ και $g(0)=1$

(ii) Παραγωγίζοντας ως προς x τις σχέσεις που δόθηκαν (θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε:

$$f'(x+y) = f(y)g'(x)+g(y)f'(x)$$
$$g'(x+y) = g(y)g'(x)-f(y)f'(x)$$

Οπότε για $x=0$ παίρνουμε:

$$f'(y) = f(y)g'(0)+g(y)f'(0) = g(y)$$
$$g'(y) = g(y)g'(0)-f(y)f'(0) = -f(y)$$

Άρα $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 148

Έστω **f** μία συνάρτηση με σύνολο ορισμού το σύνολο **R** και πεπερασμένη δεύτερη παράγωγο με την ιδιότητα

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \text{ με } x\neq y$$

Να προσδιορίσετε τον τύπο της **f**.

Λύση

Από το θ. Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,y]$, $x,y\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0\in(x,y)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

οπότε έχουμε $f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = f'(x_0)$

Για $x\to y$ έχουμε $f'(x)=f'(x_0)$ ή

$$f'(x)=(\alpha x+\beta) \quad \text{ή}$$

$$f(x)=\alpha\frac{x^2}{2}+\beta x+\gamma \quad \text{ή}$$

$$f(x)=Ax^2+\beta x+\gamma \ , \quad A\neq 0$$

ΘΕΜΑ 149

Αν οι συναρτήσεις **$f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$** είναι συνεχείς στο **$[\alpha,\beta]$** και παραγωγίσιμες στο **(α,β)** με **$g'(x)\neq 0$** τότε υπάρχουν **$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$** τέτοιοι, ώστε:

$$(\xi_1-f(\xi_2))g'(\xi_3)=(g(\xi_1)-\xi_2)f'(\xi_3)$$

Λύση

Έστω $h(x)=f(x)-x$

Θ. Bolzano

h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

$$\left.\begin{matrix} h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha<0 \\ h(\beta)=f(\beta)-\beta>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left(\begin{matrix} \alpha<f(x)<\beta & & \\ \text{άρα } \alpha<f(\alpha)<\beta & \Rightarrow & 0<f(\alpha)-\alpha \\ \alpha<f(\beta)<\beta & \Rightarrow & f(\beta)-\beta<0 \end{matrix}\right)$$

$h(\alpha)h(\beta)<0$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $h(\xi_1)=0$

Άρα $f(\xi_1)-\xi_1=0 \Rightarrow f(\xi_1)=\xi_1$

Θεωρώ $P(x)=g(x)-x$

Θ. Bolzano

P συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

$$\left.\begin{matrix} P(\alpha)=g(\alpha)-\alpha<0 \\ P(\beta)=g(\beta)-\beta>0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left(\begin{matrix} \alpha<g(x)<\beta & & \\ \text{άρα } \alpha<g(\alpha)<\beta & \Rightarrow & 0<g(\alpha)-\alpha \\ \alpha<g(\beta)<\beta & \Rightarrow & g(\beta)-\beta<0 \end{matrix}\right)$$

$P(\alpha)P(\beta)<0$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $P(\xi_2)=0$

Άρα $g(\xi_2)-\xi_2=0 \Rightarrow g(\xi_2)=\xi_2$

Οι g,f συνεχείς στο $(\xi_1,\xi_2)\subset(\alpha,\beta)$ παραγωγίσιμες στο (ξ_1,ξ_2)

Σύμφωνα με το Θ. Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε

$$\left.\begin{aligned} g'(\xi_3) &= \frac{g(\xi_1)-g(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2} \\ f'(\xi_3) &= \frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2} \end{aligned}\right\}$$

Επειδή $f(\xi_1)=\xi_1$

$$g(\xi_2)=\xi_2 \text{ έχουμε } \Rightarrow g'(\xi_3)=\frac{g(\xi_1)-\xi_2}{\xi_1-\xi_2} \text{ και } f'(\xi_3)=\frac{\xi_1-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}$$

Επειδή $g'(x)\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{\dfrac{\xi_1-f(\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)}}{\dfrac{g(\xi_1)-\xi_2}{(\xi_1-\xi_2)}}=\dfrac{f'(\xi_3)}{g'(\xi_3)}$

Άρα $\dfrac{f'(\xi_3)}{g'(\xi_3)}=\dfrac{\xi_1-f(\xi_2)}{g(\xi_1)-\xi_2} \Rightarrow (g(\xi_1)-\xi_2)f'(\xi_3)=g'(\xi_3)(\xi_1-f(\xi_2))$

ΘΕΜΑ 150

Έστω **g** μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Αν $g'(x)>0$ και $(g'(x))^2-g(x)g''(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$ με $g(0)=1$, να αποδείξετε ότι: $\ln g(x)\leq g'(0)x$, $x\geq 0$.

Λύση

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $h:[0,+\infty)\to R$ με τύπο $h(x)=\ln g(x)-g'(0)x$

Έχουμε $h'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}-g'(0) \Rightarrow h''(x)=\dfrac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)}\leq 0$

λόγω της υπόθεσης.

Δηλαδή η $h'(x)$ φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα για $x>0 \Rightarrow h'(x)\leq h'(0)=0$, αφού $g(0)=1$

επομένως η $h\downarrow[0,+\infty)$ δηλαδή $x>0 \Rightarrow h(x)<h(0)=0$, αφού $g(1)=0$

Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει

$h(x)\le 0 \Rightarrow \ln g(x)\le g'(0)x$

ΘΕΜΑ 151

Έστω η πραγματική συνάρτηση **g** συνεχής και ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $g(xy)=xg(y)+yg(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν η **g** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=2000$ τότε η **g** είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

(ii) Να βρεθεί ο τύπος της **g**.

Λύση

(i) Για $x=y=1$ έχουμε $g(1)=0$, οπότε αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ισχύει

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1} \quad (1)$$

έστω $x=x_0$ τυχαίο σημείο του R και $y=h$, τέτοια ώστε $x=x_0h$, τότε επειδή $x\to x_0$ έπεται ότι $h=1$ οπότε

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 1}\frac{g(x_0h)-g(x_0)}{x_0(h-1)}=$$

$$=\lim_{h\to 1}\frac{x_0g(h)+hg(x_0)-g(x_0)}{x_0(h-1)}=\frac{x_0}{x_0}\lim_{h\to 1}\frac{g(h)}{h-1}+\lim_{h\to 1}\frac{g(x_0)(h-1)}{x_0(h-1)}=$$

$$=g'(1)+\frac{g(x_0)}{x_0}$$

άρα $g'(x_0)=g'(1)+\dfrac{g(x_0)}{x_0}=2000+\dfrac{g(x_0)}{x_0}$

(ii) Από το ερώτημα (i) προκύπτει

$xg'(x)=2000x+g(x)$ για κάθε $x>0$

δηλαδή $\frac{x g'(x) - g(x)}{x} = 2000$ ή $\frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{2000}{x}$ ή

$\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = (2000 \ln x)'$ ή $\frac{g(x)}{x} = 2000 \ln x + c$

Για $x=1$: $c=0$, οπότε

$g(x) = 2000 \ln x^x$ για $x>0$.

ΘΕΜΑ 152

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $\mathbf{f(xy) = yf(x) + xf(y)}$ για κάθε $\mathbf{x, y \in R_+^*}$ με $\mathbf{f'(1) = 1}$.
Να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathbf{f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}}$

(ii) $\mathbf{f(x) = x\ln x}$

Λύση

(i) Έχουμε $xf'(xy) = f(x) + xf'(y)$

Για $y=1$ προκύπτει $xf'(x) = f(x) + xf'(1)$

δηλαδή $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$

(ii) Είναι $f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\ln x} f'(x) - \frac{1}{x} e^{-\ln x} f(x) = e^{-\ln x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{-\ln x} f(x))' = (x)' \Leftrightarrow f(x) = xe^{\ln x} + c \Leftrightarrow f(x) = x\ln x + c$

Για $x=1$ προκύπτει $f(1)=c$

Επειδή για $x=y=1$ έχουμε $f(1)=0=c$

άρα $f(x) = x\ln x$ για κάθε $x \in R_+^*$.

ΘΕΜΑ 153

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση με $g(-x)=g(x)$ για κάθε $-x,x\in\mathbb{R}$, συνεχής στο μηδέν με $g(0)=0$ και

(1) $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

(i) $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ii) Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(iii) Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν τότε $g'(0)=0$

Λύση

(i) Για $y\to -x$ η *(1)* δίνει $g(x-x)\leq g(x)+g(-x)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $g(0)\leq g(x)+g(x)$ $\Leftrightarrow$ $g(x)\geq 0$

(ii) Είναι $g(x)=g((x-x_0)+x_0)\leq g(x-x_0)+g(x_0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $g(x)-g(x_0)\leq g(x-x_0)$ επίσης $g(x_0)-g(x)\leq g(x-x_0)$ Άρα

$g(x-x_0)\leq g(x)-g(x_0)\beta g(x-x_0)$ $\Leftrightarrow$ $|g(x)-g(x_0)|\leq g(x-x_0)$ για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x-x_0)=g(0)=0$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-g(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$ δηλαδη συνεχής στο R.

(iii) Επειδή $g(x)\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα ισχύει το θ. Fermat

δηλαδή $g'(0)=0$.

ΘΕΜΑ 154

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, με

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το Δ=[0,1]

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{1-x}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f(0)=0$$

Άρα η f διέρχεται από το σημείο 0(0,0)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}=+\infty$$

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Η f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο (0,1).

Είναι $$f'(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+x\frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+x\,\frac{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=$$

$$=\frac{2\,\frac{x}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\frac{2x(1-x)+x}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=$$

$$=\frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\quad,\ \text{για κάθε}\quad x\in(0,1)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(3-2x)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \text{ή}\ x=\frac{3}{2}>1 \ \text{απορρίπτονται}$$

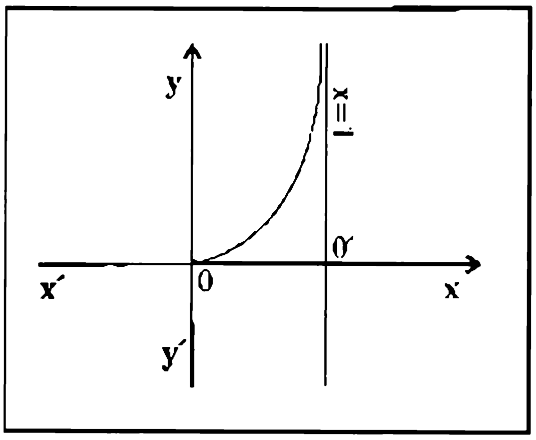
$$|x\in(0,1)|$$

$$f_\delta'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=0$$

x	0									1
f′(x)	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$f'(x)>0$, αν $x\in(0,1)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1).

x	0													1
f′(x)	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f(x)	0	↗												$+\infty$



ΘΕΜΑ 155

Έστω **μ** μια πραγματική παράμετρος.

(i) Να δειχθεί ότι όταν $\mu\le 0$, η ανισότητα $e^x\ge\mu x+1$ αληθεύει για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

(ii) Να βρεθούν οι θετικές τιμές του **μ** για τις οποίες η ανισότητα $e^x\ge\mu x+1$ αληθεύει για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Λύση

$\mu\le 0$

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x-\mu x-1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$
Μελετάμε τη μεταβολή της f.

$f'(x) = e^x-\mu$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=\mu$ δεν έχει πραγματικές ρίζες αφού $\mu\le 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^x - \mu x - 1) = +\infty$, $f(0)=0$

x	0								+∞
f΄(x)		+	+	+	+	+	+	+	+
f(x)	0	↗							∞

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Άρα όταν $\mu \leq 0$, $e^x \geq \mu x+1$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

(ii) Αν $\mu>0$, έστω $f(x) = e^x-\mu x-1$, $x \in [0,+\infty)$

$f'(x) = e^x-\mu$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\mu=0 \Leftrightarrow e^x=\mu \Leftrightarrow x=\ln\mu$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

(1) $0<\mu<1$, ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο εξής:

Αν $\mu \in (0,1] \Rightarrow \ln\mu \leq 0$

x	0										+∞
f΄(x)		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f(x)	0	↗									∞

Άρα $fx \geq 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, δηλαδή $e^x \geq \mu x+1$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και $\mu \in (0,1]$.

(2) Αν $\mu>1$, $\ln\mu>0$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο εξής:

x	0				lnμ						+∞
f΄(x)		–	–	–	0	+	+	+	+	+	
f(x)	0	↘			f(lnμ)	↗					+∞

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τιμές του μ για τις οποίες $f(x)=0$.

Συνεπώς η ανισότητα $e^x \geq \mu x+1$ δεν αληθεύει για κάθε $x \in [0,+\infty)$, όταν $\mu>1$.

Άρα $\boxed{\mu \in (0,1]}$

ΘΕΜΑ 156

α βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης e^x-mx^2, ε διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού **m**. Για $m=\sqrt{e}$ να ειχθεί ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα στο διάστημα **(-1,0)**.

ύση

εξίσωση $e^x=mx^2$ δεν έχει ρίζα x=0, οπότε μπορεί να γραφεί ως ξής $\frac{e^x}{x^2}=m$.

έτουμε $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$, $f:R^*\to R$

αριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση f.

εξίσωση f(x)=0 δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε η γραφική αράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες.

f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R-{0} και

$$f'(x)=\frac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\frac{xe^x(x-2)}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x)>0$ αν $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

$f'(x)<0$ αν $x\in(0,2)$

ρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) αι (2,+∞) και είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2).

φού η f΄ μηδενίζεται στο 2, αλλάζοντας πρόσημο από - σε +, η f χει τοπικό ελάχιστο στο 2, το $f(2)=\frac{e^2}{4}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

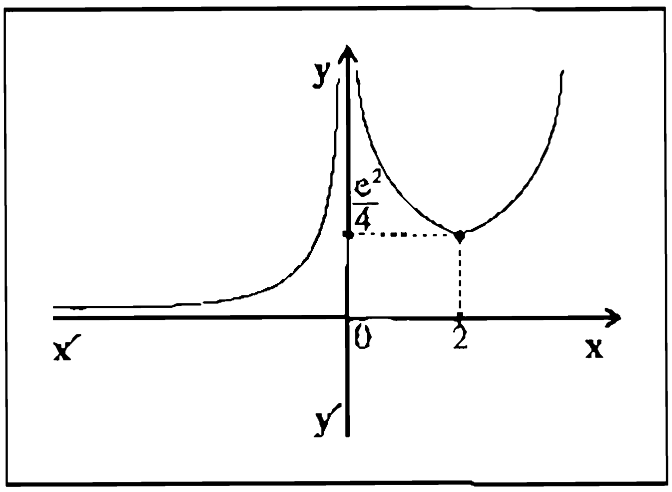
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=0 και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=0. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+ +	‖	− − −	0	+ + + +	+
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$



Η εξίσωση $e^x = mx^2$ έχει τόσες ρίζες, όσα σημεία τομής έχει η γραφική παράσταση της f με την ευθεία y=m.

Αν $m \in (-\infty, 0]$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Αν $m \in \left(0, \frac{e^2}{4}\right)$ η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα $x \in (-\infty, 0)$.

Αν $m = \frac{e^2}{4}$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_1 = x_2 = 2$ και μια ρίζα $x_3 \in (-\infty, 0)$.

Αν $m \in \left(\frac{e^2}{4}, \infty\right)$ η εξίσωση έχει 3 πραγματικές ρίζες $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$ και $x_3 \in (2, +\infty)$.

(ii) Αν $m=\sqrt{e}\in\left(0,\frac{e^2}{4}\right)$ η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα $x\in(-\infty,0)$.

Έστω $g(x)=e^x-\sqrt{e}\,x^2$, $x\in R$

$g(0) = 1 > 0$

$g(-1) = \frac{1}{e}-\sqrt{e}<0$

Αφού η g είναι συνεχής στο R και $g(0)>0$, $g(-1)<0$ προκύπτει ότι η εξίσωση $e^x=\sqrt{e}\,x^2$ έχει μια ρίζα στο $(-1,0)$.

ΘΕΜΑ 157

Έστω $\mathbf{E=[-\pi,\pi]}$ και $\mathbf{f:D\to R}$, με $\mathbf{f(x)=\sqrt{\frac{1+συνx}{1-συνx}}}$.

(i) Να βρεθεί το "ευρύτερο" υποσύνολο **D** του **E** σο οποίο η **f** είναι ορισμένη και να δειχθεί ότι η **f** είναι άρτια στο **D**.

(ii) Να παρασταθεί γραφικά η **f**.

(iii) Να δειχτεί ότι για κάθε $\mathbf{x\in D}$ ισχύει: $\mathbf{f(x)=\left|εφ\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right|}$.

Λύση

Πρέπει

(i) $\frac{1+συνx}{1-συνx}\geq 0 \Leftrightarrow (1+συνx)(1-συνx)\geq 0 \Leftrightarrow 1-συν^2x>0 \Leftrightarrow$

$ημ^2x\geq 0 \Leftrightarrow$ αληθεύει για κάθε $x\in R$

Πρέπει επίσης: $1-συνx\neq 0 \Leftrightarrow συνx\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$ $(D\subset E)$

Συνεπώς $D=[-\pi,0)\cup(0,\pi]$

Για κάθε $x\in D \Rightarrow -x\in D$. Έχουμε

$$f(-x)=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu(-x)}}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=f(x)$$

Άρα η συνάρτηση f:D→R είναι άρτια, οπότε η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

(ii) $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=\pi$ ή $x=-\pi$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(-π,0) και Β(π,0).

Η f είναι συνεχής στο D.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία -π και π.

$$f'(-\pi)=\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)-f(-\pi)}{x+\pi}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}{x+\pi}=$$

$$=\lim_{x\to-\pi}\frac{\sqrt{\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2 x/2}{2\,\eta\mu^2 x/2}}}{x+\pi}=\lim_{x\to-\pi}\frac{|\sigma\varphi\frac{x}{2}|}{\underset{>0}{x+\pi}}=\lim_{x\to-\pi}\left|\frac{\sigma\varphi\frac{x}{2}}{x+\pi}\right|=$$

$$=\left|\lim_{x\to-\pi}\frac{\sigma\varphi x/2}{x+\pi}\right|=\left|\lim_{x\to-\pi}\frac{-1}{2\,\eta\mu^2\frac{x/2}{1}}\right|=\left|\lim_{x\to-\pi}\frac{-1}{2\,\eta\mu^2\frac{x}{2}}\right|=\frac{1}{2}$$

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}{x-\pi}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{|\sigma\varphi\frac{x}{2}|}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{|\sigma\varphi\frac{x}{2}|}{-(\pi-x)}=-\lim_{x\to\pi}\left|\frac{\sigma\varphi\frac{x}{2}}{x-\pi}\right|=$$

$$=-\left|\lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\varphi x/2}{x-\pi}\right|=-\left|\lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{-1}{2\,\eta\mu^2\frac{x}{2}}}{1}\right|=-\left|\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2\,\eta\mu^2\frac{x}{2}}\right|=-\frac{1}{2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο D.

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}=\frac{-\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)-(1+\sigma\upsilon\nu x)\,\eta\mu x}{2\,(1-\sigma\upsilon\nu x)^2\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}=$$

$$=\frac{-\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x+1+\sigma\upsilon\nu x)}{2\,(1-\sigma\upsilon\nu x)^2\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}=\frac{-\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}$$

Επομένως $f'(x)=-\dfrac{\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}}$ για κάθε $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$

και $f'(-\pi)=\dfrac{1}{2}$, $f'(\pi)=-\dfrac{1}{2}$

Η εξίσωση $f'(x)=0$, δεν έχει ρίζες στο $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\pi,0)$ και $f'(x)<0$ για $x\in(0,\pi)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\pi,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

x	$-\pi$	0	π

(ii) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=\sqrt{\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu^2 x/2}{2-\eta\mu^2 x/2}}=\left|\sigma\varphi\dfrac{x}{2}\right|=\left|\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\right|$

Συνεπώς $f(x)=\left|\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\right|$

ΘΕΜΑ 158

Έστω η συνάρτηση **f** με $\mathbf{f(x)=2x^2+1-\ln|x|}$, για $\mathbf{x\neq 0}$. Να παρασταθεί γραφικά η **f**. Να αποδειχτεί ότι $\mathbf{f(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x\neq 0}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι: $\Delta=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
Παρατηρούμε ότι η f είναι άρτια. Πράγματι για κάθε $x\in\Delta \Rightarrow -x\in\Delta$ και $f(-x)=2x^2+1-\ln|-x|=f(x)$.
Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο Δ.

$$f'(x)=\frac{4x^2-1}{x} \quad \text{για} \quad x\neq 0$$

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{2} \;\text{ ή }\; x=-\frac{1}{2}$$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\frac{1}{2})$ και

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\frac{1}{2})$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\frac{1}{2},0)$ και $(\frac{1}{2},+\infty)$.

$$f''(x)=\frac{8x\cdot x-(4x^2-1)}{x^2}=\frac{4x^2+1}{x^2} \quad \text{για κάθε } x\neq 0$$

Η εξίσωση $f''(x)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα δεν έχουμε σημεία καμπής.

$\Leftrightarrow \quad e^{2x}-e^x=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(e^x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο O(0,0).

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}-e^x+1)'}{e^{2x}-e^x+1}=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}=\frac{e^x(2e^x-1)}{e^{2x}-e^x+1}$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\ln 2$

$x>-\ln 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$

$x<-\ln 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\ln 2,\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\ln 2)$.

$$f''(x)=\frac{-e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(2e^x-e^x+1)^2}$$

$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}-4e^x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2+\sqrt{3})$ ή $x=-\ln(2+\sqrt{3})$

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\ln(2+\sqrt{3}),\ln(2+\sqrt{3}))$ και

$f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-\ln(2+\sqrt{3}))\cup(\ln(2+\sqrt{3}),\infty)$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(-\ln(2+\sqrt{3}),\ln(2+\sqrt{3}))$ και κάτω σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-\ln(2+\sqrt{3}))$ και $(\ln(2+\sqrt{3}),\infty)$.

Αφού $f''(\ln(2+\sqrt{3}))=0$ και σ' αυτό το σημείο η f'' αλλάζει πρόσημο, η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $\ln(2+\sqrt{3})$.

Αφού η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x=-\ln(2+\sqrt{3})$ αλλάζοντας πρόσημο (από - σε +), η f παρουσιάζει καμπή στο $-\ln(2+\sqrt{3})$.

$$-\ln(2+\sqrt{3})<-\ln 2<\ln(2+\sqrt{3})$$

Άρα $f''(-\ln 2)>0$, συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $-\ln 2$, το $f(-\ln 2)=\ln\frac{3}{4}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}-e^x+1)=0$$

Άρα η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη (στο $-\infty$) της γραφικής παράστασης της f.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{2x}-e^{x}+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^{2x}+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})}{x}=$$

$$=2+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})}{x}=$$

$$=2+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})}{e^{-2x}-e^{-x}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=2+1\cdot 0=2$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-2x]=$$

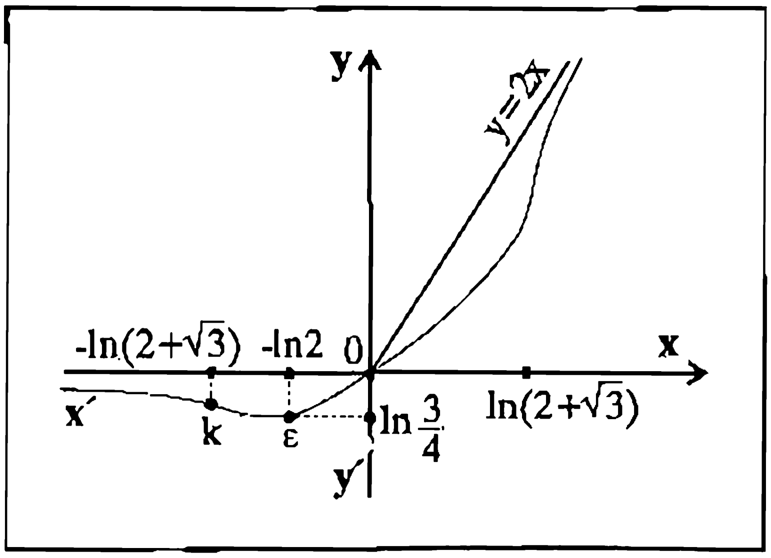
$$=\lim_{x\to\infty}[\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-\ln e^{2x}]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{e^{2x}-e^{x}+1}{e^{2x}}=\ln 1=0$$

Συνεπώς η ευθεία y=2x είναι πλάγια ασύμπτωτη (στο $+\infty$). Ο πίνακας μεταβολών της f είναι

x	$-\infty$		$-\ln(2+\sqrt{3})$				$-\ln 2$		0		$\ln(2+\sqrt{3})$			∞
f΄	−	−	|	−			0	+	+	+	|	+		
f΄΄	−	−	0	+	+	+	|	+	+	+	0	−	−	
f	0	↘	$\ln(6-3\sqrt{3})$ k		↘		$\ln\frac{3}{4}$ ε	↗	0	↗	$\ln(6+3\sqrt{3})$ k		↗	∞

$f(-\ln(2+\sqrt{3}))=\ln(6-3\sqrt{3})$

$f(\ln(2+\sqrt{3}))=\ln(6+3\sqrt{3})$



(ii) Η εξίσωση γράφεται $\ln(e^{2x}-e^{x}+1) = \ln e^{k}$, αφού $e^{2x}-e^{x}+1>0$ και $e^{k}>0$.

Δηλαδή έχουμε: $f(x)=k$

Ξέρουμε ότι η εξίσωση $f(x)=k$ έχει τόσες πραγματικές ρίζες όσα κοινά σημεία έχει η γραφική παράσταση της f με την ευθεία $y=k$.

Επομένως έχουμε

Για $k\in(-\infty,\ln\frac{3}{4})$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Για $k=\ln\frac{3}{4}$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $\boxed{x = -\ln 2}$.

Για $k\in(\ln\frac{3}{4},0)$ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες:

$x_1\in(-\infty,-\ln 2)$ και $x_2\in(-\ln 2,0)$.

Για $k=0$ η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα $x=0$.

Για $k>0$ η εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα $x\in(0,\infty)$.

ΘΕΜΑ 160

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:[0,\infty)\to R}$ με:

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} x\ln x-x & \alpha\nu\ x\in(e,\infty) \\ -x(\ln x-1) & \alpha\nu\ x\in(0,e] \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}}$$

(i) Να μελετηθεί η $\mathbf{f}$ ως προς τη συνέχεια και να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$.

(ii) Να δειχτεί ότι ο περιορισμός της $\mathbf{f}$ στο $[e,\infty)$ είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση. Να εξεταστεί αν η $\mathbf{f^{-1}}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. (Να παρασταθεί γραφική η $\mathbf{f}$).

(iii) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{f'(e^3)}$ και $\mathbf{(f^{-1})'(2e^3)}$.

Λύση

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x - x & \text{αν } x\in(e,\infty) \\ -x(\ln x-1) & \text{αν } x\in(0,e] \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα (0,e) και (e,∞).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (e,∞) με παράγωγο $f'(x)=\ln x$ και στο (0,e) με παράγωγο $f'(x)=-\ln x$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο 0 και το e,

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^-}[-x(\ln x-1)]=0$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}(x\ln x-x)=0$$

$$f(e)=0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο e.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[-x(\ln x-1)]=-\lim_{x\to 0^+} x\ln x+\lim_{x\to 0^+} x=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}+0=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$f(0)=0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο [0,∞).

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το e.

$$f'_\alpha(e)=\lim_{x\to e^-}\frac{-x(\ln x-1)}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{(x(\ln x-1))'}{(x-e)}=-\lim_{x\to e^-}\frac{\ln x-1+1}{1}$$

$$f'_\delta(e)=\lim_{x\to e^+}\frac{x\ln x-x}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{(x(\ln x-1))'}{(x-e)'}=1$$

Αφού $f'_\alpha(e)\neq f'_\delta(e)$ προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο e

$$f'_\delta(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x(\ln x-1)}{x}=-\lim_{x\to 0^+}(\ln x-1)=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,e)\cup(e,\infty)$.

Αφού $f'_\delta(0)=+\infty$ προκύπτει ότι η ημιευθεία $x=0$ είναι εφαπτομένη από δεξιά της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0).

Επίσης οι ημιευθείες $y=-1(x-e) \Leftrightarrow y=-(x-e)$ και $y=x-e$ είναι ημιεφαπτομένες από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f στο (e,0).

(ii) Μελέτη της f

Το πεδίο ορισμού της f είναι $[0,\infty)$.

$f(0) = 0$

Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=e$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία O(0,0) και B(e,0)

$$f'(x)=\begin{cases}-\ln x & \text{αν } x\in(0,e)\\ \ln x & \text{αν } x\in(e,\infty)\end{cases}$$ Η f μηδενίζεται στο σημείο 1.

x	0			1			e			
$f'(x)$		+	+	0	−	−	||	+	+	+

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και (e,∞) και γνησίως φθίνουσα στο (1,e).

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\in(0,e)\\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x\in(e,\infty)\end{cases}$$

Άρα $f''(x)<0$ αν $x\in(0,e)$ και $f''(x)>0$ αν $x\in(e,\infty)$.

Αφού $f'(1)=0$ και $f''(1)<0$

η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1, το $f(1)=1$.

Η $f''(x)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, επομένως δεν έχουμε σημεία καμπής.

Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω στο (0,e) και άνω στο (e,∞).

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x\ln x-x)=+\infty$$

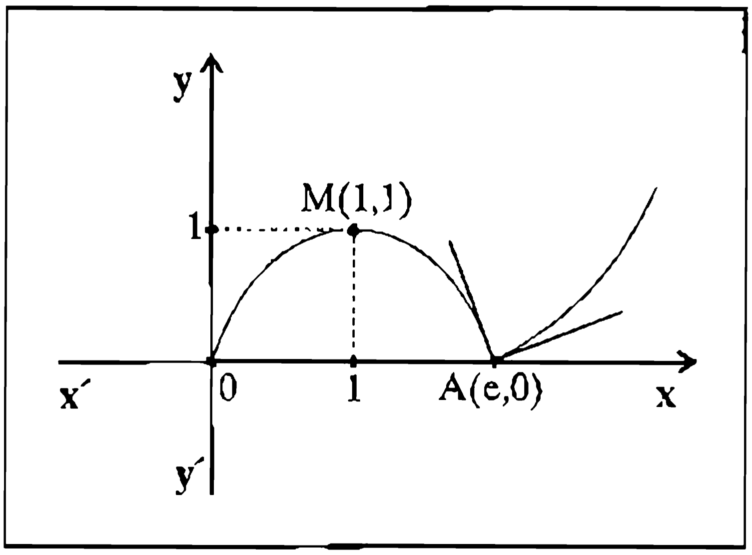
Άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\ln x-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}(\ln x-1)=\infty$$

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

x	0			1			e				∞
f′	+	+	+	0	−	−	‖	+	+	+	+
f″	−	−		−		−	‖		+	+	+
f	0	↗		1 μ	↘		0	↗			∞



Ο περιορισμός της f στο (e,∞) είναι μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα και το σύνολο των τιμών της είναι [0,∞).

Η συνάρτηση f:[e,∞)→[0,∞) με f(x)=xlnx-x είναι συνεχής στο [e,∞) και παραγωγίσιμη στο [e,∞).

Επίσης είναι συνάρτηση "1-1" και $f'(x)\geq 1$, για κάθε $x\in[e,+\infty)$.

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Η αντιστροφή της f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το [0,∞) και σύνολο αφίξεων το [e,∞).

Η f^{-1} είναι "1-1" και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0,∞).

Επίσης η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο [0,∞).

(iii) Ξέρουμε ότι $\boxed{(f^{-1})'(f(x))\, f'(x) = 1}$ *(1)* για κάθε $x \in [e,\infty)$

Για $x=e^3$ η (1) γίνεται

$(f^{-1})'(f(e^3))f'(e^3) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(2e^3)f'(e^3) = 1$

$f'(e^3) = \ln e^3 = 3$

Άρα $f(f^{-1})'(2e^3) = \frac{1}{3}$

Συνεπώς έχουμε $f'(e^3) = 3$

$(f^{-1})'(2e^3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 161

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση **g** για την οποία ισχύει:

$\mathbf{2g(x^2)-1 \geq g^2(x)}$ για κάθε $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η **g** δεν αντιστρέφεται.

(ii) Υπάρχει $\mathbf{x_0 \in (0,1)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{g'(x_0)=0}$.

Λύση

(i) Για $x=0$ έχουμε: $2g(0)-1 \geq g^2(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g^2(0)-2g(0)+1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (g(0)-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (g(0)=1$

Για $x=1$ προκύπτει: $2g(1)-1 \geq g^2(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g^2(1)-2g(1)+1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (g(1)-1)^2 \leq 0 \Rightarrow g(1)=1$

επειδή $0 \neq 1$ και $g(0)=g(1)$ η g δεν είναι "ένα προς ένα".

(ii) Ισχύει το Θ. Rolle, άρα υπάρχει

$x_0 \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $g'(x_0)=0$.

• Προτεινόμενες ασκήσεις

1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης **f** με

(i) $f(x)=\ln^2 x+\ln(\ln x)$

(ii) $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$

(iii) $f(x)=\ln \varepsilon\varphi\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu x\ln \varepsilon\varphi x$

(iv) $f(x)=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

(v) $f(x)=e^{10^x}$

(vi) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{x}{\eta\mu x}$

(vii) $f(x)=x^{\alpha^\alpha}+\alpha^{x^\alpha}+\alpha^{\alpha^x}$, $(\alpha>0)$

(viii) $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x+e^{-2}x\eta\mu x)+x$

(ix) $f(x)=(\ln x)^x$

(x) $f(x)=(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$

(xi) $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)^x$

2

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\ln^2 x - x - 1998 \text{ για κάθε } x > 1$$

$$f_2(x) = \ln x + \ln^2 x - 2x \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f_3(x) = ημx - x + \frac{x^3}{6} \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f_4(x) = e^x + \ln(x+1) - 1 \text{ για κάθε } x > -1$$

$$f_5(x) = \frac{x^2 + \ln x + 1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f_6(x) = 4ημx - 3x - \frac{1}{2}ημ2x \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{2} + x - \ln(1 - x^2) \text{ για κάθε } x \in (-1,1)$$

$$f_8(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1) \text{ για κάθε } x > -1$$

$$f_9(x) = ημ^2x - \sqrt{2}\,ημx + 2\sqrt{2} \text{ για κάθε } x \in [0,2\pi]$$

$$f_{10}(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x \beta^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \alpha^2 \text{ , } \alpha \neq \beta \text{ και } 0<\alpha,\beta\neq 1$$

$$f_{11}(x) = \left(\frac{1999}{1998}\right)^x + 1998^x - 2000 \text{ για κάθε } x \in R$$

$$f_{12}(x) = 2xημx + 2συνx - \frac{1}{2}x^2 + \pi^{12} \text{ , } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_{13}(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f_{14}(x) = f(x) = \alpha^x - x \ , \ 0<\alpha<1 \quad \text{και} \quad x \in R$$

$$f_{15}(x) = e^x + \ln(x+1) - 1998 \quad x > -1$$

$$f_{16}(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{για κάθε} \quad x \in R$$

$$f_{17}(x) = x + \ln(\text{συν}x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_{18}(x) = \ln(\ln x) - \ln^2 x + 2000 \ , \quad x > 0$$

$$f_{19}(x) = \eta\mu x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_{20}(x) = \eta\mu^2 x - x^2 + 1998 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0$$

$$f_{21}(x) = \frac{1}{4}x^2(\ln x^2 - 1) - 2x(\ln x - 1) \ , \quad x > 0$$

3

Να βρείτε τη νιοστή παράγωγο των συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = x\ln x \ , \quad x > 0$

(ii) $f_2(x) = \eta\mu x \ , \quad x \in (0, \pi)$

(iii) $f_3(x) = e^{1998x} \ , \quad x \in R^*$

(iv) $f_4(x)=xe^x$, $x\in R^*$

4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & ,\ \gamma\iota\alpha\ x\neq 0\\ 0 & ,\ \gamma\iota\alpha\ x=0\end{cases}$

και $g(0)=g'(0)$, $g''(0)=1998$, να βρεθεί ο αριθμός $f'(0)$.

5

Αν $\alpha\in R^*$ και $f(x)=\alpha\eta\mu x-\eta\mu 3x$, να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει τρία τοπικά ακρότατα στο $(0,\pi)$.

6

Αποδείξτε ότι: $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}>1$ για $x\geq\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

7

Αν οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορίζονται στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίζονται στο (α,β) , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)(f(\beta)-f(\alpha))=f'(\xi)(g(\beta)-g(\alpha))$.

8

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\alpha e^{x}-(1+\alpha)e^{-x}}{1+e^{x}}$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, όπου α πραγματική παράμετρος.

(ii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f' είναι μονότονος στο $\mathbb{R}$.

9

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x αποδείξτε ότι:

(i) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{y\,f(x)-x\,f(x)}{y-x}=f(x)-x\,f'(x)$

(ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}=8f(x)\,f'(x)$

10

Αν $y=-\ln(1+x)$ να αποδείξετε ότι $xy'+1=e^{y}$.

11

Αν $y=\dfrac{x+\ln x}{x-x\ln x}$, να αποδείξετε ότι $2x^2y'-x^2y^2-1=0$.

12

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}\alpha x^3 + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)\,x + \delta$$

όπου α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι:

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Γενικές 1990)

13

Έστω $\mathbf{f}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και οι θετικοί αριθμοί $\varkappa$, λ με $\varkappa+\lambda=1$.

(i) Αποδείξτε ότι: αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε:

$$f(\varkappa\alpha+\lambda\beta) \leq \varkappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)$$

(ii) Αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

$$f(\varkappa\alpha+\lambda\beta) \geq \varkappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)$$

(iii) Αν $f(x) = \ln x$, $x \in [\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ τότε

$$\alpha^{\varkappa}\beta^{\lambda} \leq \varkappa\alpha + \lambda\beta$$

14

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισοτικές σχέσεις:

(i) $x|\ln x| < e^{-1}$ για κάθε $x\in(0,1)$

(ii) $\sqrt[4]{x} \le 2x+\frac{3}{8}$ για κάθε $x\ge 0$

(iii) $x^2+1 > e^{-x^2}$ για κάθε $x\neq 0$

(iv) $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \ge 1+\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x\in R$

(v) $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \le x^\alpha+(1-x)^\alpha \le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $\alpha>1$

(vi) $(\alpha^x+\beta^x)^{1/x} > (\alpha^y+\beta^y)^{1/y}$ για κάθε $y>x>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$

(vii) $\frac{\alpha}{e^{\beta x}}+\beta > \frac{\beta}{e^{\alpha x}}+\alpha$ για κάθε $x>0$, $\beta>\alpha>0$

(viii) $\ln(1+x^2)-\ln(1+y^2)\le y-x$ για κάθε $x<y<0$

(ix) $(x+y)^{\frac{x+y}{2}} < xe^x+ye^y$ για κάθε $y>x>0$

(x) $\frac{x\ln x+y\ln y}{x+y} > \ln\frac{x+y}{2}$, $x>0$, $y>0$

(xi) $x^\alpha-1 \le \alpha(x-1)$, $x>0$, $0<\alpha<1$

(xii) $(y-x)\varepsilon\varphi x<\ln(\sigma\upsilon\nu x)-\ln(\sigma\upsilon\nu y)<(y-x)\varepsilon\varphi y$ με

$$0<x<y<\frac{\pi}{2}$$

15

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1998^x+1999x=1$ έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

16

Να αποδείξετε ότι $(1-x)e^x\leq 1$ για κάθε $x<1$.

17

Να αποδείξετε ότι $(xe)^{y-x}<\frac{y^y}{x^x}<(ye)^{y-x}$ για κάθε $y>x>0$.

18

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^{x^2+1}}\ , & x\in(-1,0)\\ 0\ , & x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)\end{cases}$$

Να βρεθεί το "ευρύτερο σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η f.

19

Αποδείξτε ότι αν $f:(-1,1)\to R$ είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x=0$ τότε: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)$

20

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x+1-\frac{1}{x}$ εφάπτονται και να γράψετε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης στο σημείο επαφής τους.

21

Έστω $g:R\to R$ μία παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ώστε να ισχύει: $(g'(x)-g(x))x^2=2xg(x)-2(g'(x)-g(x))$ για κάθε $x,y\in R$. Αν C_g διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ να βρεθεί ο τύπος της g.

22

Έστω $g:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$g(\alpha+\beta)=g(\alpha)g(\beta)+1998\alpha\beta \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in R$$

με $g(0)\neq 0$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη και στο R.

23

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$$ και για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^*$ είναι:

$$xy^3 + f(xy) + 2000 = f(x) + f(y) + x$$

Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$.

24

Να αποδείξετε ότι:

Α. $\dfrac{y-x}{y\ln y} < \ln y - \ln x < \dfrac{y-x}{x\ln x}$ με $2<x<y<3$

Β. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \dfrac{x^2 e^x}{2}$ για κάθε $x>0$

25

Θεωρούμε τις πραγματικές συναρτήσεις $\mathbf{f},\mathbf{g}$ με $\mathbf{g}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$ και $g(0)=1$. Αν ισχύουν $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)-xg(x)=1$ να αποδείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη

(ii) $f(x)=ce^x$ όπου $\mathbf{c}$ σταθερά.

26

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{g:R_+^* \to R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2$$ και για κάθε $\mathbf{x,y \in R_+^*}$ είναι:

$$g(xy)=\frac{1}{y}g(x)+\frac{1}{x}g(y)$$

(i) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R_+^*}$

(ii) Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{g}$.

27

Αν για τους θετικούς αριθμούς $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{2000}$ που είναι διαφορετικοί από τη μονάδα ισχύει:

$$\theta_1^x+2\theta_2^x+\ldots+2000\theta_{2000}^2\geq 1+2+\ldots+2000$$

να αποδείξετε ότι: $\theta_1\cdot\theta_2^2\ldots\theta_{2000}^{2000}=1$.

28

Δίνεται $g(x)=\ln x+e^{x^2}-e$

(i) Να αποδείξετε ότι: $g\left(\frac{1}{2000}\right)<0$

(ii) Να αποδείξετε ότι: $g(1998)<g(1999)$

(iii) Να βρεθεί η τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού θ αν ισχύει:

$$e^{\theta^2}+\ln\theta=e^{64}+\ln 64$$

29

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\theta,0]$ με $g(0)=0$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in[\theta,0]$.

Να αποδείξετε ότι $\frac{g(\theta)}{\theta}<\frac{g(x)}{x}$ για κάθε $x\in(\theta,0)$.

30

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση: $f(x)=(x^2+\theta^2)e^{-\theta x}$, $\theta>1$

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\theta^2e^{2\theta}>\theta^2+4$.

31

Να προσδιορίσετε το θετικό αριθμό θ αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$1998\theta^x-2000x\geq 1998$$

32

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x)=x^x$ για κάθε $x>0$.

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\ln(1+\beta)}{\ln\alpha} < \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln\alpha}$ με $0<\alpha<\beta$.

33

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ με $\alpha\neq 0$.

(i) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα αντίστοιχα σημεία $M(1,\alpha)$ της παραπάνω παραβολής διέρχονται από σταθερό σημείο του άξονα $x'x$.

(ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες στα σημεία $M(1,\alpha)$ και $M'(-1,\alpha)$ τέμνονται στον άξονα $y'y$.

(iii) Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha\in R^*$ ώστε οι εφαπτομένες στα σημεία M και M' να σχηματίζουν ορθή γωνία.

34

Αν η πραγματική συνάρτηση g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} \geq \frac{g(\beta)-g(x)}{\beta-x}$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

(ii) Αν $g(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$, τότε $g(x)\geq x$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

35

Έστω $g:R\to R$ μία παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ώστε να ισχύει: $|g(x)-g(y)|\leq 1-\sigma\upsilon\nu(x-y)$ για κάθε $x,y\in R$, να αποδεί

ξετε ότι $g'(x)=0$.

36

Έστω $g:[0,1]\to R$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(0)=0$ και $g(1)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,1]$ τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{1998g'(x_1)}+\frac{1}{1998g'(x_2)}=\frac{1}{999}$$

37

Έστω $f:[1998,+\infty)\to R$ με τις ιδιότητες:

(i) $xf'(x)\ln x=-f(x)$ για κάθε $x>1998$

(ii) $f(1999)=1$

(α) Να βρεθεί ο τύπος της f

(β) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω

(γ) Να αποδείξετε ότι $f(1998)>f(1999)$.

38

Έστω $g:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $g(x)+g''(x)=0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(g'(x))^2+(g(x))^2$ για κάθε $x\in R$ είναι σταθερή.

39

Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 0$. Αν $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{1998x}+\frac{f(x)}{x}+2000$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$.

40

Αν η πραγματική συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $g'(x_0)(x_0^2-\alpha x_0-\beta x_0+\alpha\beta)=g(x_0)(\alpha+\beta-2x_0)$

41

Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $g^2(x)-g^2(y)=g(x+y)g(x-y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

42

Να προσδιορίσετε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

43

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)\leq 2000$ και

$g(\beta)-g(\alpha)=2000(\beta-\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι $g(x)=g(\alpha)+2000(x-\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

44

Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:R\to R$ αν ισχύουν $f(0)=0$ και $f'(x)-1999e^x e^{-f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$.

45

Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to R$. αν ισχύει $xf'(x)-1998x=f(x)$ για κάθε $x>0$.

46

Έστω η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $g(\alpha)=g(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $g''(\xi)g(\xi)=-g'(\xi)$.

47

Αν ισχύει $\theta^x+1998^x\geq 1999^x+2000^x$ για κάθε $x\in R$ και $\theta>0$, να βρεθεί η τιμή του θ.

48

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f, ορισμένη στο R, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε:

$$1998f''(x)+(\alpha\eta\mu^2x-\beta^2\sigma\upsilon\nu^4x)f'(x)+\eta\mu^4x=-1998e^{-x}-\beta^2$$

για κάθε $x\in R$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varrho\neq 0$;vste $f'(\varrho)=0$. Να εξετάσετε αν το $f(\varrho)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f.

49

Έστω $g:R\to R$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $g(x+y)=e^xg(y)+e^yg(x)$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι $e^y(g'(x)-g(x))=e^x(g'(y)-g(y))$ για κάθε $x,y\in R$.

50

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει:

$$e^x-2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\geq x\,g(x)\quad x\in R,$$ να βρεθεί το $g(0)$.

51

Έστω $f(x)=\alpha_1\eta\mu x+\alpha_2\eta\mu 2x+\ldots+\alpha_\nu\eta\mu(\nu x)$ όπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\nu\in N^*$. Δίνεται ότι $|f(x)|\leq|\eta\mu x|$ για όλα τα $x\in R$, να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+\nu\alpha_\nu|\leq 1$$ *(Putnam 1967)*

52

(i) Υποθέτουμε ότι $f:[0,1\}\to R$ είναι παραγωγίσιμη, $f(0)=0$

και $f(x)>0$ για $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $c\in(0,1)$ έτσι ώστε: $\frac{2f'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

(ii) Υπάρχει ένας αριθμός $d\in(0,1)$ έτσι ώστε:

$$\frac{3f'(d)}{f(d)}=\frac{f'(1-d)}{f(1-d)}$$

53

Έστω $g:(0,+\infty)\to R$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $e^{g(x^2)}=\frac{x}{x^{x^2}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g'(e)=\frac{1}{2}e^{-1}-1$

(ii) Ο άξονας $y'y$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g.

54

Έστω $f,g:R\to R$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με:

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $g(x)>0$. Αν $f(0)=g(0)$ να αποδείξετε ότι:

(i) $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\geq 0$

(ii) $f(x)<g(x)$ για κάθε $x<0$

55

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και $g(0)=1$ με $|g'(x)|\leq 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$, να αποδείξετε ότι $0\leq g'(x)\leq 2$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

56

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ με $\alpha>0$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και ισχύει $2f(0)=f(\alpha)+f(-\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιος ώστε $f''(x_0)=0$.

57

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) η οποία μηδενίζεται στα σημεία α και β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}=2000$

58

Εστω g μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), και $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)e^{g(x)}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $g'(x_0)=\dfrac{1}{\alpha-x_0}+\dfrac{1}{\beta-x_0}$

59

Έστω μία συνάρτηση **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $f'(x_0)+2000f(x_0)=0$

60

Έστω **g** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$(\beta^2-\alpha^2)g'(x_0)=2x_0(g(\beta)-g(\alpha))$$

61

Έστω $f,\varphi:R\to R$ παραγωγίσιμες με $f(x)\neq 0$. Αν ισχύει:

$f'(x)-f(x)\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=f(x)$ με $f(0)=g(0)$, να αποδείξετε ότι:

$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=e^x$ για κάθε $x\in R$.

62

Έστω $f:[\alpha,\beta]\in R_+^*$ με $\ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\beta-\alpha$. Αν η **f** είναι παραγω-

γίσιμη να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 1$.

63

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση **f** δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** με $f'(0) = f(0) = 0$ και $f''(x) < e^2$. Να αποδείξετε ότι:

$f(x) < \frac{e^2}{2} x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

64

Έστω **f** παραγωγίσιμη στο **R** και $g(x) = \frac{1}{x^3} f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

Αν $f'(x) > 3x^2 g(x)$ για κάθε $x \neq 0$, να μελετηθεί η **g** ως προς τη μονοτονία.

65

Έστω **f** μία πραγματική συνάρτηση στο **R**. Αν η f' είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f .

66

Έστω η συνάρτηση **f** παραγωγίσιμη στο **R** και για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει: $1998xf(x) - e^x \leq \eta\mu(1998x) - 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(0)=\frac{1999}{1998}$$

67

Έστω η συνάρτηση $f:\Delta\to R$ με $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(Δ- το πεδίο ορισμού της f). Να αποδείξετε ότι:

(i) Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα, σημεία καμπής.

68

(i) Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ είναι:

$$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y>0$ και $\nu\in N^*$ ισχύει:

$$(x+y)^\nu\leq 2^{\nu-1}(x^\nu+y^\nu)$$

69

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

70

Έστω η συνάρτηση g 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $g(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Για τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+x^2g'(0)-x^2g(1)-xg'(0)$ ισχύει το θ. Rolle.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(1)-g'(0)=\frac{1}{2}g''(x_0)$$

71

Έστω η συνάρτηση g 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(\alpha)=g(\beta)=0$ και $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Στη συνάρτηση $h(x)=e^xg'(x)-e^xg(x)$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

(ii) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g''(x_0)-g(x_0)=0$.

72

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^{\lambda}-x^2+1$, $x\in(0,+\infty)$ με $0<\lambda<1$.

(i) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.

(ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της g'.

73

Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$, $\alpha,\beta\in R$.

(i) Να βρεθούν οι α, β τέτοιοι ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$, και να έχει τιμή 3.

(ii) Για τους α και β που βρέθηκαν, να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $(0,1)$.

(iii) Να βρεθεί μία παράγουσα της συνάρτησης $g:R\to R$ με

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}\,f(x)$$

74

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη τέτοια ώστε:

$f^2(\alpha)+\beta^2=f^2(\beta)+\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)f'(\xi)=\xi$.

75

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ μία συνάρτηση συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(\theta_1)-f(0))\sigma\upsilon\nu\theta_2=f'(\theta_2)\eta\mu\theta_1$$

76

Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=\frac{e^{\alpha x}}{x^2+\alpha^2}$, $\alpha\in R^*$

(i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f.

(ii) Να αποδείξετε ότι για $\alpha\geq 1$ ισχύει η ανισότητα:

$$e^{\alpha x}>1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$$ για κάθε $x>0$.

(iii) Αν x_1,x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της παραγώγου f, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

(iv) Να βρείτε την παράγουσα της συνάρτησης $g:R\to R$ με τύπο

$g(x)=(x^2+\alpha^2)f(x)\eta\mu x$

77

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο **ΑΒΓ** με πλευρά $\alpha=10cm$. Αν **Μ** είναι ένα σημείο της πλευράς **ΒΓ** και **Δ, Ε** οι προβολές του σημείου **Μ** στις πλευρές **ΑΒ, ΑΓ** αντιστοίχως, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου **Μ**, ώστε το γινόμενο $(M\Delta)(ME)$ να γίνει μέγιστο.

78

Δίνεται η ορθή γωνία **xOy** και το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** μήκους **10 m** του οποίου τα άκρα ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές **Oy** και **Ox** αντιστοίχως. Το σημείο **Β** κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=2$ **m/sec** και η θέση του πάνω στον άξονα **Ox** δίνεται από τη συνάρτηση $g(t)=\upsilon t$ όπου $t\in[0,5]$.

(i) Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου **ΑΟΒ** ως συνάρτηση του t.

(ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος **ΟΑ** είναι **6 m**;

(Γενικές εξετάσεις 1993)

79

Έστω $f:(\alpha,+\infty)\to R$ συνάρτηση παραγωγίσιμη ώστε για κάθε $M>0$ να ισχύει $f(x)>M$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=R\in R$. Να

αποδείξετε ότι: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ και $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

80

Έστω $f:(0,\pi)\to R$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)+\sigma\varphi x f(x)-e^{1998x}=0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, να βρεθεί ο τύπος της f.

81

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^2}$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

82

Έστω $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύουν:

(i) Οι f και g παραγωγίσιμες στο $x_0=0$.

(ii) $f(0)=1999-g(0)$

(iii) $f(x)+g(x)\geq 1999+2000x$ για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι: $f'(0)+g'(0)=2000$

83

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\dfrac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}-\{\alpha\}$ τέτοια ώστε: $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)}=\dfrac{A}{(x-\alpha)^2}+\dfrac{B}{x-\alpha}+\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$

για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)$.

(Γενικές 1997)

84

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι:

(i) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$(\beta-\alpha)\,g'(x_0)=\frac{e^{g(\beta)}-e^{g(\alpha)}}{e^{g(x_0)}}$$

(ii) Αν $g(x)>0$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$(\alpha-\beta)\,\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=\ln g(\alpha)-\ln g(\beta)$$

85

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση **g** στο $[-1,1]$ με $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $(1-x_0^2)\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}=2x_0$

86

Να αποδείξετε ότι:

$$\log\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x}{(x+2)\,(x+3)}<0 \quad ,x>-2$$

87

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} \quad ,0<\beta<\alpha<\frac{1}{2}\pi$$

88

Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\beta+1}>\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} \quad ,\ \alpha,>0\ ,\ \alpha\neq\beta$$

89

Να αποδείξετε ότι: $x(2+\sigma\upsilon\nu x)>3\eta\mu x$ για κάθε $x>0$.

90

Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση: $f(x)=x\,f\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$ για κάθε x πραγματικό.

91

Να προσδιορίσετε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $f(1)=1$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

92

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}$, να αποδείξετε ότι η g είναι γν. αύξουσα.

93

Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ με $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p>1$ να αποδείξετε ότι:

$\alpha^{1/p} \cdot \beta^{1/q} \le \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$.

94

Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(\alpha)=g(\beta)=0$ με $f(x)g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}+\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=\frac{1}{x_0}$$

95

(α) Έστω $\varrho\in \mathbb{R}$ και $A(x)$, $B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, ώστε $B(\varrho)\neq 0$ και $A(x)$ έχει βαθμό ≥ 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο, ώστε: $A(x)B(x)=(x-\varrho)^2 f(x)$ αν και μόνο αν $A(\varrho)=A'(\varrho)=0$.

(β) Έστω $\nu\in \mathbb{Z}$, $\nu\geq 1$. Να βρείτε τις τιμές των k,λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x)=x^\nu(\nu x^3+kx^2+\lambda x+8)$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

(Γενικές 1994)

96

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

(i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

(ii) $f'' = g''$

(iii) $f(0) = g(0)$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$, $c \in R$

(β) Αν $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες ϱ_1, ϱ_2 τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\varrho_1, \varrho_2]$.

(Γενικές 1989)

97

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει παράγωγο στο (α, β)και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Για τη συνάρτηση $F(x) = \dfrac{f(x)}{x - c}$, $c \in [\alpha, \beta]$

υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.

ii) Αν $c \in [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

(Γενικές 1983)

98

(α) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το R. Αν οι f, g έχουν συνεχείς παραγώγους και συνδέονται

μεταξύ τους με τις σχέσεις: $f' = g$, $g' = -f$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμα ότι υπάρχουν οι σχέσεις: $f'' + f = g'' + g = 0$ και η συνάρτηση: $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.

(β) Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g. Αποδείξτε ότι αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

(Γενικές 1996)

99

Έστω $g: R \to R$ μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$ για κάθε $x, y \in R$. Να αποδείξετε ότι $g''(x)g(y) = g(x)g''(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

100

Έστω $g: R \to R$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $g'(x) > x^{2000}$ για κάθε $x \in R$ με $g(0) = 2000$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

(iii) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

101

Έστω η ευθεία $y=1998x+2000$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης g στο $+\infty$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda g(x) + 1998x}{x g(x) - 1998x^2 + 3x} = 1$

102

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^x = 2000 - x$, $\lambda > 1$, έχει μοναδική λύση.

103

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^{1998} + \dfrac{1}{\beta^{1998x}} \geq 2$ όπου α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί που εκφράζουν τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων ω_1, ω_2 ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, να βρεθούν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β.

104

Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots, 1998\}$ ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η πραγματική συνάρτηση:

$$g(x) = 2^x + 2x - \lambda, \ \lambda \in \Omega.$$

Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε για την g να ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$.

105

Εκλέγουμε τυχαία ένα αριθμό λ από το σύνολο $A=\{0,1,2,3\}$ και ένα αριθμό από το σύνολο $B=\{2,3,5,7,9\}$. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^2+\lambda x+\mu}{e^x}$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=1$.

106

Αν η πραγματική συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1,x_2 στο $[\alpha,\beta)$ ώστε:

$$(\beta-\alpha)(g''(\xi_2)-g''(\xi_1))=2(g'(\alpha)+g'(\beta))$$

107

Έστω η πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (α,β). Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει τη χορδή AB με $A(\alpha,g(\alpha))$, $B(\beta,g(\beta))$ στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος AB, να αποδείξετε ότι:

(i) Υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία που επαληθεύουν το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού για τη g στο $[\alpha,\beta]$.

(ii) Η C_g και η χορδή AB τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

108

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ με $f''(x)<0$ για $1\leq x\leq 3$ και $f(2)=0$ και $f(3)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)<x+2$ για κάθε $x\in [1,2]$ και $f(x)>x-2$ για κάθε $x\in (2,3)$.

109

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$ μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη και $g''(x)<0$ για κάθε $x\in (\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

$(\alpha-\beta)g(x)<g(\alpha)(\alpha-\beta)+(f(\alpha)-f(\beta))(x-\alpha)$ για κάθε $x\in (\alpha,\beta)$

110

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ και ισχύει $g'(x)\eta\mu x\neq g(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in (0,\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in (0,\pi)$ ώστε $g(\xi)=0$.

111

Έστω g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $|g''(x)|\beta k$ για κάθε $x\in (0,\alpha)$. Αν στη θέση x_0 έχουμε ακρότατο όπου $x_0\in (0,\alpha)$, να αποδείξετε ότι: $|g'(0)|+|g'(\alpha)|\leq \alpha k$

112

Έστω $\mathbf{g}$ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $A(\alpha,g(\alpha))$, $B(\beta,g(\beta))$ είναι σημεία της C_g, να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{M}$ της C_g με τετμημένη μεταξύ των α και β βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $\mathbf{AB}$ που έχει την ίδια τετμημένη με το σημείο $\mathbf{M}$.

113

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις: $f(x)=|A+xB^{-1}\Gamma|$ και $g(x)=|A+x\Gamma B^{-1}|$, $x\in \mathbf{R}$ με A, B, Γ πίνακες $\nu\times\nu$. Αν ο πίνακας $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος και $AB=BA$, να αποδείξετε ότι:

(i) Αν x_0 είναι ρίζα της $f(x)=0$ τότε θα είναι ρίζα και της $g(x)=0$.

(ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$ για το οποίο ισχύει: $f'(x_0)=g'(x_0)$.

114

(α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με $f(x)=\alpha^x-x$, $x\in \mathbf{R}$, $0<\alpha<1$.

(β) Να βρείτε τα $\lambda\in \mathbf{R}$ για τα οποία:

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(1-2) \quad ,0<\alpha<1$$

(Ιούνιος 1992)

115

Έστω $g:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $g'(x)+xg^2(x)=0$ για κάθε $x\in R$, με $g(0)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι $g'(0)<0$.

116

Δίνεται η καμπύλη $y=x^k\ln^\nu x$, $x>0$, $k\in N$, με $k>1$ και $\nu\in N$ με ν άρτιο.

(i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη έχει δύο σημεία καμπής.

(ii) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο της καμπύλης έχει τετμημένη μεταξύ των τετμημένων των σημείων καμπής.

117

Έστω $\alpha\geq 2$, να αποδείξετε ότι: $(1+x^2)^\alpha\geq(1+x^\alpha)^2$ για κάθε $x\in(0,1)$.

118

Έστω $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $x\geq 1$, να αποδείξετε ότι $x\eta\mu\theta\geq\eta\mu(x\theta)$.

119

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha < \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} < \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} < \beta$$

για $0<\alpha<\beta$.

120

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to \mathbf{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}(x-\beta)\, g''(x_0)$$

121

Έστω $g:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $g'(x) > \frac{\alpha}{x}$ για κάθε $x>0$ και $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η $f(x)=g(x)-\alpha\ln x$ είναι γν. αύξουσα.

(ii) $g(1999)-g(1998)>\alpha\ln\frac{1999}{1998}$

122

Έστω $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $g'(x)=(x^3+x)e^{x-g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρεθεί ο τύπος της g.

123

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $0<x_1,\ x_2<\pi$ ώστε να ισχύει:

$$\eta\mu\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{1}{2}(\eta\mu x_1+\eta\mu x_2)$$

124

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=xe^{-x}+x$

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(ii) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi\theta+\frac{\varepsilon\varphi\theta}{e^{\eta\mu\theta}}=1+\frac{1}{e^{\sigma\upsilon\nu\theta}}\ ,\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

(iii) Να αποδείξετε ότι η πλάγια ασύμπτωτος είναι η $y=x$.

125

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ ώστε:

$$\ln\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\geq\sqrt{\ln x_1\ln x_2}$$

126

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε:

$$\frac{x_1}{x_1^2+1}+\frac{x_2}{x_2^2+1}=0$$

127

Να αποδείξετε ότι:

$$\beta^{k-1}<\frac{\alpha^k-\beta^k}{k(\alpha-\beta)}<\alpha^{k-1}\ ,\ \alpha>\beta>0\ ,\ k>1$$

128

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x)=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ και $g(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)-x=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(iii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $(1-x+x^2)^{2x+1}+(1+x+x^2)^{2x+1}$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(e^{f(x)}-1)^2$.

(iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$f(\varepsilon\varphi\alpha)=g(\sigma\varphi\alpha)-2\ln 3$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

129

Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $g(\alpha)+\beta^3=\alpha^3+g(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε να είναι $g'(x_0)=3x_0^2$.

130

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο

$f(x)=(x-1)^{\nu+1}+\alpha x+\beta-\alpha$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ διαιρείται ακριβώς με το $Q(x)=x^2-4x+4$.

131

Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

132

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x,y \in (0,2\pi)$ ώστε να ισχύει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu y}{1-\sigma\upsilon\nu y}\geq 2\,\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$$

133

Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \frac{2}{3}\,\eta\mu x - \frac{1}{3}\,\varepsilon\varphi x}{x^5}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \varepsilon\varphi x}{x\,\varepsilon\varphi x}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\eta\mu x(\eta\mu x) - \eta\mu^2 x}{x^6}$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x\,\eta\mu x - x}{\eta\mu(\eta\mu x)}$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x\,e^{\alpha x} - 2\alpha x}$ (vi) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (\ln x \ln(\ln x))$

134

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\sigma\upsilon\nu x}$ (ii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\eta\mu 4x\,\sigma\upsilon\nu 2x}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha^x - 1}{x}$ $(\alpha > 0)$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$

(v) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ (vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{mx} - 1}{\varepsilon\varphi(\nu x)}$ (viii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + 5^x)}{\ln(1 + 3^x)}$

135

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς **α,β** αν ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0$$

136

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-\beta^x}{\varepsilon\varphi x}$, $(\alpha>0,\beta>0)$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\eta\mu\, mx)}{\ln(\eta\mu x)}$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\eta\mu x}$

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\sigma\upsilon\nu\,\alpha x}{e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu\beta x}$

(vi) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{x}+x}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}$

(vii) $\lim_{x\to \pi}(\pi-x)\,\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$

(viii) $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-2^x}{x}$

(ix) $\lim_{x\to 0}x\ln x$

(x) $\lim_{x\to \infty}\frac{e^x-2^x}{x}$

(xi) $\lim_{x\to -\alpha}(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)$

(xii) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

• ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Βασικές γνώσεις στον ολοκληρωτικό λογισμό

Πίνακας αρχικών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Μία αρχική της f
$f(x)=0$	$F(x)=c$, c σταθερά
$f(x)=x^{\nu}$ $\nu\in N^*$, $x\in R$	$F(x)=\frac{1}{\nu+1}x^{\nu+1}$
$f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in R-\{-1\}$ και $x>0$	$F(x)=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in R^*$	$F(x)=\ln\|x\|$ η F είναι αρχική της f σε κατάλληλο διάστημα κάθε φορά
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$	$F(x)=\frac{1}{\ln\alpha}\cdot\alpha^x$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\varphi x$ για κατάλληλο διάστημα
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\varphi x$ για κατάλληλο διάστημα

Πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων

i. $\int 0\,dx = c$

ii. $\int dx = x + c$

iii. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

iv. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \;,\; \alpha \neq -1$

v. $\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$

vi. $\int \eta\mu x\,dx = -\,\sigma\upsilon\nu x + c$

vii. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi x + c = \int (1 + \varepsilon\varphi^2 x)dx = \int (\varepsilon\varphi x)'dx$

viii. $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\,\sigma\varphi x + c = \int (1 + \sigma\varphi^2 x)\,dx = -\int (\sigma\varphi x)'dx$

ix. $\int e^x\,dx = e^x + c$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

1. $\int \lambda f(x)dx=\lambda \int f(x)dx,\ \lambda\in \mathbb{R}^*$

2. $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$

όπου $u=g(x)$ και $du=g'(x)dx$

3. $\int f'(x)dx=f(x)+c$

4. $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

5. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=-\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g'(x)\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)\,dx$

(όπου f', g' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$)

7. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=0$

8. Αν $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ τότε $F'(x)=f(x)$

(προϋπόθεση η F παραγωγίσιμη)

9 $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\, du$

όπου f, g' συνεχείς και $u=g(x)$, $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$

10 Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = f(\xi)\, (\beta - \alpha)$$

11 $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$

12 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(όπου f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και G μία αρχική της f).

13 $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx$

14 $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$

15 Αν $f(x) \leq g(x)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$

(όπου f, g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$).

16 Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

17 Αν **f** συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$m\,(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le M\,(\beta-\alpha)$$

18

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)\ , \quad x \in \Delta$$

19

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

20 Αν μία πραγματική συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ τότε:

(i) Αν η **f** είναι περιττή $(f(-x)=-f(x))$ ισχύει:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

(ii) Αν η **f** είναι άρτια $(f(-x)=f(x))$ ισχύει:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$$

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int \frac{dx}{συνx + συνα}}$

Λύση

$$\boxed{συνA + συνB = 2συν\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}}$$

Έχουμε: $I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{συν\frac{x+α}{2}συν\frac{x-α}{2}} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{συν\frac{x+α}{2}}{συν^2\frac{x+α}{2}συν^2\frac{x-α}{2}}dx = \frac{1}{ημα}\int \left(\ln\left|\frac{συν\frac{x-α}{2}}{συν\frac{x+α}{2}}\right|\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{ημα}\ln\left|\frac{συν\frac{x-α}{2}}{συν\frac{x+α}{2}}\right| + c\,, \quad ημα \neq 0.$$

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\mathbf{I_1 = \int \frac{dx}{ημ(x+2000)\,ημ(x+1998)}}$$

$$\mathbf{I_2 = \int \frac{dx}{συν(x+2000)\,συν(x+1998)}}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\eta\mu(x+2000)\,\sigma\upsilon\nu(x+1998)}$$

Λύση

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu((x+\alpha)-(x+\beta))$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu((x+\alpha)-(x+\beta))$$

Έχουμε:

$$I_1 = \frac{1}{\eta\mu 2}\int\left(\ln\left|\frac{\eta\mu(x+1998)}{\eta\mu(x+2000)}\right|\right)' dx = \frac{1}{\eta\mu 2}\ln\left|\frac{\eta\mu(x+1998)}{\eta\mu(x+2000)}\right| + c$$

$$I_2 = \frac{2}{\eta\mu 2}\int\left(\ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1998)}{\sigma\upsilon\nu(x+2000)}\right|\right)' dx = \frac{2}{\eta\mu 2}\ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1998)}{\sigma\upsilon\nu(x+2000)}\right| + c$$

$$I_3 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2}\int\left(\ln\left|\frac{\eta\mu(x+2000)}{\sigma\upsilon\nu(x+1998)}\right|\right)' dx = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2}\ln\left|\frac{\eta\mu(x+2000)}{\sigma\upsilon\nu(x+1998)}\right| + c$$

ΘΕΜΑ 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int \sqrt{x^2+2000}\,dx$

Λύση

Έχουμε: $I = \int \sqrt{x^2+2000}\,dx = \int \frac{x^2+2000}{\sqrt{x^2+2000}}dx =$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2000}}dx + 2000\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2000}} =$$

$$= \int\left(\sqrt{x^2+2000}\right)' x\,dx + 2000\int\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+2000}\right|\right)' dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+2000} - \int\sqrt{x^2+2000}\,dx + 2000\ln\left|x+\sqrt{x^2+2000}\right| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2I = x\sqrt{x^2+2000} + 2000\ln\left|x+\sqrt{x^2+2000}\right| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 2000} + 1000 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2000} \right| + c$$

ΘΕΜΑ 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I = \int \ln(\eta\mu x)\, dx}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int \ln\left(2\,\eta\mu\frac{x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \int (\ln 2)\, dx + \int \ln\left(\eta\mu\frac{x}{2}\right) dx + \int \ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right) dx \\ &= (\ln 2)\, x + \int \ln\left(\eta\mu\frac{x}{2}\right) dx + \int \ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

Έστω $u = \frac{x}{2}$ τότε:

$$I = (\ln 2)\, x + 2\int \ln(\eta\mu u)\, du + 2\int \ln(\sigma\upsilon\nu u)\, du$$

Επομένως:

$$I = (\ln 2)\, x + 2I + 2\int \ln(\sigma\upsilon\nu u)\, du$$

Δηλαδή:

$$I = -(\ln 2)\, x - 2\int \ln(\sigma\upsilon\nu u)\, du = -(\ln 2)\, x - 2\int \ln\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) du$$

Για $t = \frac{\pi}{2} - u$ έχουμε:

$$I = -(\ln 2)\, x + 2\int \ln(\eta\mu t)\, dt = -(\ln 2)\, x + 2I$$

Άρα $I = (\ln 2)x + c$

ΘΕΜΑ 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int \eta\mu(2\ln x)\, dx}$

Λύση

Θέτουμε $x = e^t$, οπότε $dx = e^t\, dt$.

Έχουμε:

$$I = \int \eta\mu\,(2\ln e^t)\, e^t\, dt =$$

$$= \int \eta\mu\,(\ln e^{2t})\, e^t\, dt = \int \eta\mu 2t (e^t)'\, dt =$$

$$= e^t\, \eta\mu 2t - \int e^t \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2t dt =$$

$$= e^t\, \eta\mu 2t - 2\int (e^t)'\, \sigma\upsilon\nu 2t dt =$$

$$= e^t\, \eta\mu 2t - 2\, e^t\, \sigma\upsilon\nu 2t + 2\int e^t\, (-2)\, \eta\mu 2t dt =$$

$$= e^t\, \eta\mu 2t - 2e^t\, \sigma\upsilon\nu 2t - 4I$$

Άρα

$$I = \frac{1}{5}\, e^t\, (\eta\mu 2t - 2\sigma\upsilon\nu 2t) + c =$$

$$= \frac{1}{5}\, e^{\ln x}\, [\eta\mu 2\ln x - 2\,\sigma\upsilon\nu 2\ln x] + c =$$

$$= \frac{1}{5}\, x\, [\eta\mu(2\ln x) - 2\,\sigma\upsilon\nu(2\ln x)] + c \;, \quad c \in R.$$

ΘΕΜΑ 6

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}\, dx}$

Λύση

1ος τρόπος

Για $x = t - \frac{\pi}{4}$ $dx = dt$, $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$

$$2x = 2t - \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{1-\sigma\upsilon\nu 2t}dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\eta\mu^2 t}dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\varphi^2 t\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 t} - 1\right)dt = -\left[\sigma\varphi\, t\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

2ος τρόπος

Έχουμε:

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x} + 1 - 1\right)dx = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} - \left[x\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\pi}{4} = \left[\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ΘΕΜΑ 7

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $I_1 = \int \sqrt{\dfrac{(x+1)^3}{x-1}}\,dx$ (ii) $I_2 = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$

Λύση

(i) Θέτουμε $\dfrac{x+1}{x-1} = t^2$ και έχουμε $\dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{2}{x-1} = t^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{2}{x-1} = t^2 - 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{t^2-1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{2}{t^2-1} + 2 = \frac{2t^2}{t^2-1} \quad \text{και}$$

$$x = \frac{2}{t^2-1} + 1 = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \; dx = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\,dt \; \text{ή} \; dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$I_1 = \int (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^3}\,dt = -8\int \frac{t^4}{(t^2-1)^3}\,dt$$

Στη συνέχεια αναλύεται η συνάρτηση $\dfrac{t^4}{(t^2-1)^2}$ σε άθροισμα κλασμάτων και στο τέλος βρίσκουμε

$$I_1 = \frac{2(x+7)}{3}\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right| + c$$

(ii) Θέτουμε $1 - x^3 = t^2 \Rightarrow -3x^2\,dx = 2t\,dt$

$$I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{x^3\sqrt{1-x^3}} = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2\,dx}{x^3\sqrt{1-x^3}} = -\frac{1}{3}\int \frac{2t\,dt}{t(1-t^2)} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{1+t+(1-t)}{(1-t)(1+t)}\,dt = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|1-\sqrt{1-x^3}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|1+\sqrt{1-x^3}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| + c$$

ΘΕΜΑ 8

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)}\quad \mathbf{I_1} = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(ii)}\quad \mathbf{I_2} = \int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Λύση

(i) Θέτουμε $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} = t \;\Rightarrow\; 1+\sqrt[4]{x} = t^3 \;\Rightarrow\; x = (t^3-1)^4$

$\Rightarrow\; dx = 4\cdot 3t^2\,(t^3-1)^3\,dt = 12t^2\,(t^3-1)^3\,dt$

$$I_1 = 12\int \frac{t^3\,(t^3-1)^3}{\sqrt{(t^3-1)^4}}\,dt = 12\int \frac{t^3\,(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}\,dt =$$

$$= 12\int t^3\,(t^3-1)\,dt = 12\int (t^6-t^3)\,dt = 12\,\frac{t^7}{7} - 12\,\frac{t^4}{4} + c =$$

$$= \frac{12t^7}{7} - \frac{21t^4}{7} + c = \frac{3}{7}\,(4t^3-7)\,t^4 = \frac{3}{7}\,\left(\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})}\right)^4\left[4\,(1+\sqrt[4]{x})-7\right]$$

$$= \frac{3}{7}\,\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x}\,)^4}\,(4\,\sqrt[4]{x}-3) + c\ ,\ c\in R$$

(ii) Θέτουμε $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = t \;\Rightarrow\; \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = dt \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\,\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\,dx = dt \;\Rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt$$

$$I_2 = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\ln^2(1+\sqrt{2})}{2}$$

ΘΕΜΑ 9

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (i) $\mathbf{I_1} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$

(ii) $I_2=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$, $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$

Λύση

(i) $I_1=\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx=\int \frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{(1-\eta\mu^2 x)^2}$

Θέτουμε: $\eta\mu x = t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x dx = dt$ και έχουμε $I_1=\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$

Είναι $\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{\Gamma}{1+t}+\frac{\Delta}{(1+t)^2}$

προσδιορίζουμε τους Α, Β, Γ, Δ κ.λ.π.

(ii) Θέτουμε: $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow dt=\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$I_2=\int \frac{\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\int \frac{dt}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1+t^2)}=\int \frac{dt}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-t^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=$$

$$=\int \frac{dt}{\eta\mu^2\alpha-t^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\frac{1}{2\varepsilon\varphi\alpha}\left[\int\frac{dt}{\varepsilon\varphi\alpha+t}+\int\frac{dt}{\varepsilon\varphi\alpha-t}\right]=$$

$$=\frac{1}{\eta\mu 2\alpha}\Big[\ln|t+\varepsilon\varphi\alpha|-\ln|t-\varepsilon\varphi\alpha|\Big]+c=$$

$$=\frac{1}{\eta\mu 2\alpha}\ln\left|\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\alpha}\right|+c=\frac{1}{\eta\mu 2\alpha}\ln\left|\frac{\eta\mu(x+\alpha)}{\eta\mu(x-\alpha)}\right|+c$$

ΘΕΜΑ 10

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (i) $I_1=\int \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x\,(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}dx$

(ii) $I_2=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^6 x}$ (iii) $I_3=\int \frac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Λύση

(i) Θέτουμε: $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=dt$

$$I_1=\int \frac{t\,dt}{t+1}=\int \frac{t+1-1}{t+1}dt=\int dt-\int \frac{dt}{t+1}=$$

$$=t-\ln|t+1|=\varepsilon\varphi x-\ln|\varepsilon\varphi x+1|+c$$

(ii) $I_2=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^6 x}=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}(1+\varepsilon\varphi^2 x)^2=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}(\varepsilon\varphi^4 x+2\varepsilon\varphi^2 x+1)=$

$$=\int \frac{\varepsilon\varphi^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx+2\int \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx+\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\int \varepsilon\varphi^4 x\,(\varepsilon\varphi x)'\,dx+2\int \varepsilon\varphi^2 x\,(\varepsilon\varphi x)'\,dx+\varepsilon\varphi x=$$

$$=\frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5 x+\frac{2}{3}\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x+c$$

(iii) Θέτουμε: $\varepsilon\varphi x=t \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=dt$

$$I_3=\int \frac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}\,dt=\frac{t^{1/2+1}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}=\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\varphi^3 x}+c$$

ΘΕΜΑ 11

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (i) $I_1=\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

(ii) $I_2=\int \frac{\ln^3 x}{x(1+\ln^2 x)}dx$

Λύση

(i) $I_1 = \int \frac{e^x (e^x + 1)}{e^x (e^x - 1)} dx$

Θέτουμε: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$I_1 = \int \frac{t+1}{t(t-1)} dt = \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t(t-1)} =$$

$$= \ln|t-1| + \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| + \ln|t| + c = 2\ln|e^x - 1| - x + c$$

(ii) Θέτουμε: $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ και έχουμε

$$I_2 = \int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \int \frac{t^3 + t - t}{t^2+1} dt = \int \frac{t(t^2+1)}{t^2+1} dt - \int \frac{t\,dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int [\ln(t^2+1)]' dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + c =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \ln^2 x) + c$$

(iii) Θέτουμε: $e^x = t \Rightarrow x = \ln t$ και $e^x dx = dt$

$$I_3 = \int \frac{(t^3 - t)\frac{1}{t} dt}{t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1} = \int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)^2 - t(t^2+1)} = \int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)}$$

Είναι: $\frac{t^2 - 1}{(t^2+1)(t^2-t+1)} = -\frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t-1}{t^2-t+1}$ οπότε

$$I_3 = -\int \frac{2t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = -\ln|t^2+1| + \ln|t^2 - t + 1| =$$

$$= \ln \frac{t^2 - t + 1}{t^2+1} = \ln \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x}\ 1} + c$$

ΘΕΜΑ 12

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $$I_1 = \int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}}\ , \quad x>1$$

(ii) $$I_2 = \int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}}\ , \quad x>1$$

Λύση

(i) $$I_1 = \int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^2\sqrt{x^2+2x+4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+4}}$$

Θέτουμε: $x+\frac{1}{x}=t$ οπότε $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2+2t+4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}} = \ln\left(t+1+\sqrt{t^2+2t+2}\right)+c$$

Άρα $$I_1 = \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x}+\frac{\sqrt{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}}{x}\right)+c$$

(ii) $$I_2 = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3}}\,dx$$

Θέτουμε: $x+\frac{1}{x}=t$ οπότε $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2+2t+3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2}} =$$

$$= \ln(t+1) = \ln\left(x+\frac{1}{x}+1\right)+c = \ln\frac{x^2+x+1}{x}+c$$

ΘΕΜΑ 13

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\mathbf{I_1 = \int \dfrac{x^2 - 2x + 5}{e^x}\, dx \ , \ x \in R}$

(ii) $\mathbf{I_2 = \int \dfrac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx}$

Λύση

(i) $I_1 = \int (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x}\, dx = - \int (x^2 - 2x + 5)\, (e^{-x})'\, dx =$

$= - (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x} + \int (2x - 2)\, e^{-x}\, dx =$

$= - (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x} - \int (2x - 2)\, (e^{-x})'\, dx =$

$= - (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x} - [\, (2x - 2)\, e^{-x} - \int 2e^{-x}\, dx\,] =$

$= - (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x} - (2x - 2)\, e^{-}x + 2 \int e^{-x}\, dx =$

$- (x^2 - 2x + 5 + 2x - 2)\, e^{-x} - 2\, e^{-x} =$

$- e^{-x}\, (x^2 + 3 + 2) = - e^{-x}\, (x^2 + 5) + c$

(ii) $I_2 = \int \dfrac{x^2 + 1 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \int \sqrt{x^2 + 1}\, dx + \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx + \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \dfrac{1}{2}\, (x \sqrt{x^2 + 1} + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}\,) + \sqrt{x^2 + 1} + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}\,) + c$

ΘΕΜΑ 14

Έστω $\mathbf{f: (0\,,\,\infty) \to R}$ μια συνάρτηση με μια αρχική $\mathbf{F}$. Να βρεθεί

η **F** όταν

$$\mathbf{F(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(x^2+1)\,(x^2+3)}{x}} \quad \text{και} \quad \mathbf{f(1) = 4}$$

Λύση

Είναι: $F\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\left(\frac{1}{x^2}+3\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{(x^2+1)\,(1+3x^2)}{x}$

$$\left(F(x)\, F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = F'(x)\, F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) F(x) =$$

$$f(x)\, F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = \frac{(x^2+1)\,(1+3x^{2)}}{x} - \frac{1}{x^2}\,\frac{(x^2+1)\,(x^2+3)}{x} =$$

$$= \frac{x^2\,(x^2+1)\,(3x^2+1) - (x^2+1)\,(x^2+3)}{x^3} = \frac{(x^2+1)\,(3x^4+x^2-x^2-3)}{x^3} =$$

$$= \frac{x^2+1)\,(3x^4-3)}{x^3} = \frac{3x^6+3x^4-3x^2-3}{x^3} =$$

$$= 3x^3 + 3x - 3x^{-1} - 3x^{-3}$$

Άρα

$$F(x)\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \int (3x^3 + 3x - 3x^{-1} - 3x^{-3}\, dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2\,x^2} - 3\ln x + c$$

Όμως $F\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{(x^2+1)\,(3x^2+1)}{x\, f(x)}$ οπότε

$$\frac{F(x)\,(x^2+1)\,(3x^2+1)}{x\, f(x)} = \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 3\ln x + \frac{3}{2x^2} + c$$

Όμως $f(1) = 4$ και $F(1) = 2$, οπότε $c = \frac{1}{4}$

$$\ln|f(x)| = \int \frac{\frac{3}{4}x^5 + \frac{3}{2}x^3 - 3\ln x + \frac{3}{2x} + \frac{1}{4}x}{(x^2+1)\,(3x^2+1)}$$

ΘΕΜΑ 15

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I=\int \frac{5+\eta\mu 2x+3\eta\mu x+5\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2}dx\ ,\ x\in R$$

Λύση

Είναι: $5+\eta\mu 2x+3\eta\mu x+5\sigma\upsilon\nu x=5+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu x+5\sigma\upsilon\nu x=$

$=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)^2-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Άρα $I=\int \frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)^2+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2}dx=$

$=\int(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)\,dx+\int\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2}dx=$

$=\int(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)\,dx+\int\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)'}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2}dx=$

$=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+2x+\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2)+c$

ΘΕΜΑ 16

Αν η συνάρτηση $\mathbf{f:[0,1]\to R_+^*}$ έχει μια αρχική συνάρτηση $\mathbf{F:[0,1]\to R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F(0)=0}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{F(c)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi c}{2}<\frac{2}{\pi}f(c)}$

Λύση

Βάσει της άσκησης 191 υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\int_0^1 F(x)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}=\frac{F(x)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi c}{2}}{f(c)}$$

Όμως $\dfrac{\int_0^1 F(x)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}=\dfrac{\left[\frac{2}{\pi}\eta\mu\frac{\pi x}{2}F(x)\right]_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\eta\mu\frac{\pi x}{2}f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}=$

$$=\frac{\frac{2}{\pi}F(1)-\frac{2}{\pi}\int_0^1\eta\mu\frac{\pi x}{2}f(x)\,dx}{F(1)}<\frac{2}{\pi}\frac{F(1)}{F(1)}=\frac{2}{\pi}$$

Άρα $\dfrac{F(c)\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi c}{2}}{f(c)}<\dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow F(c)\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi c}{2}<\dfrac{2}{\pi}f(c)$

ΘΕΜΑ 17

Να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης: $\mathbf{F(x)=\int_{\eta\mu x}^{\sigma\upsilon\nu x}\sqrt{1+t^2}\,dt}$

Λύση

$F'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}-(\eta\mu x)'\sqrt{1+\eta\mu^2 x}=$

$=-\eta\mu x\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}-\sigma\upsilon\nu x\sqrt{1+\eta\mu^2 x}$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\sigma\upsilon\nu x\sqrt{1+\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x\,(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)=\sigma\upsilon\nu^2 x\,(1+\eta\mu^2 x) \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\pm 1$

Όμως εφx < 0, οπότε εφx = -1 ⇔ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

x	0		$\frac{2\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		2π
F'(x)		-	0	+	0	-	
F(x)		↘		↗	M	↘	

$$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+t^2}\,dt \quad , \quad F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$F_{max} = F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

ΘΕΜΑ 18

Να βρεθούν οι **Α, Β, Γ** τέτοιοι ώστε:

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{f(x)\,dx = A\,f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + B\,f(0) + \Gamma\,f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση **f** βαθμού το πολύ **3**.

Λύση

Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^2}{2} + \delta x\right]_{-1}^{1} = \frac{\beta}{3}2 + \delta\,2 = \frac{2\beta}{3} + 2\delta$$

Άρα $\frac{2\beta}{3} + 2\delta = A\left(\frac{-\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \delta\right) + B\,\delta + \Gamma\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \delta\right)$

Άρα $A = B = \Gamma = \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 19

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $I_1 = \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + 1/x} dx \ , \ x > 0$

(ii) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \ , \ x \in (0, 1)$

Λύση

(i) $I_1 = \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + 1/x} dx =$

$= \int \left[e^{x + 1/x} + \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x + 1/x} \right] dx =$

$= \int e^{x + 1/x} x' + \left(x + \frac{1}{x}\right)' x e^{x + 1/x} dx =$

$= \int \left(x e^{x + 1/x}\right)' dx = x e^{x + 1/x} + c$

(ii) Θέτουμε $x = συν^2 t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $dx = -2 ημt συνt dt$

Έχουμε $I_2 = \int \frac{-2 ημt συνt dt}{\sqrt{συν^2 t(1 - συν^2 t)}} =$

$= -2 \int \frac{ημt συνt}{συνt ημt} dt = -2t + c$, όπου $x = συν^2 t$

ΘΕΜΑ 20

Έστω $f:[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και $g:[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με $g(x_0) = 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Χωρίς τον κανόνα l' Hospital να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{g(x)}$$

Λύση

Έχουμε: $$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{g(x)} = \frac{(x - x_0)\,f(c)}{g(x)} = \frac{f(c)}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$ όπου $c \in (x_0, x)$

Η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε όταν $x \to x_0$ έχουμε $c \to x_0$, άρα

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

g παραγωγίσιμη στο x_0, οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Άρα $$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g'(x_0)}$$

ΘΕΜΑ 21

Έστω $\mathbf{f:[0,1] \to R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]^M$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, τέτοια ώστε:

1) $|f'(x) - 2x| \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$

2) $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Αποδείξτε ότι: $-\frac{2}{e}+1<\int_0^1 f(t)\,dt<2e-5$

Λύση

$|f'(x)-2x| \leq f(x) \Leftrightarrow -f(x) \leq f'(x)-2x \leq f(x)$

Επειδή:

$f(x)+f'(x)-2x \geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$

η συνάρτηση

$g(x) = e^x f(x)+(-2x+2)e^x \quad x\in[0,1]$

είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) και

$g'(x)=e^x f(x)+f'(x)e^x+e^x(2-2x)-2e^x=e^x(f(x)+f'(x)-2x) \geq 0$

Άρα η g είναι αύξουσα, οπότε $g(0) \leq g(x) \leq g(1)$ για κάθε $x\in[0,1]$,

δηλαδή: $f(0)+2 \leq e^x(f(x)-2x+2) \leq ef(1) \Leftrightarrow 2 \leq e^x[f(x)-2x+2] \leq e$

$\Leftrightarrow 2e^{-x}+2x-2 \leq f(x) \leq e^{1-x}+2x-2$ *(1)* για κάθε $x\in[0,1]$

Από την *(1)* έχουμε $f(x)-f'(x)+2x \geq 0$

οπότε αν $h(x) = -e^{-x}f(x)+(-2x-2)e^{-x}$, $x\in[0,1]$

η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) και

$h'(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x)-2e^{-x}-e^{-x}(-2x-2)=e^{-x}[f(x)-f'(x)+2x] \geq 0$

Άρα η h είναι αύξουσα και $h(0) \leq h(x) \leq h(1)$ για κάθε $h\in[0,1]$

Άρα: $-f(0)-2 \leq -e^{-x}f(x)+(-2x-2)e^{-x} \leq -e^{-1}f(1)-4e^{-1} \Leftrightarrow$

$-2 \leq -e^{-x}f(x)+(-2x-2)e^{-x} \leq -5e^{-1}$

$-2e^x \leq -f(x)-2x-2 \leq -5e^{-1+x}$

$-2e^x+2x+2 \leq -f(x) \leq -5e^{x-1}+2x+2$

$2e^x-2x-2 \geq f(x) \geq 5e^{x-1}-2x-2$

$5e^{x-1}-2x-2 \leq f(x) \leq 2e^x-2x-2$ *(2)*

Έχουμε:

$$\int_0^1 (2e^{-x}+2x-2)\,dx=\left[-2e^{-x}+\frac{2x^2}{2}-2x\right]_0^1=-2e^{-1}+1-2+2=-\frac{2}{e}+1$$

$$\int_0^1 (e^{1-x}+2x-2)\,dx=\int_0^1 e^t\,dt+\left[x^2-2x\right]_0^1=e-1+1-2=e-2$$

$$\int_0^1 (5e^{x-1} - 2x - 2)\,dx = 5\int_{-1}^{0} e^t\,dt - \left[x^2 + 2x\right]_0^1 = 5\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 3 =$$

$$= 5 - 5e^{-1} - 3 = 2 - \frac{5}{e}$$

$$\int_0^1 (2e^x - 2x - 2)\,dx = \left[2e^x - x^2 - 2x\right]_0^1 = 2e - 3 - 2 = 2e - 5$$

Άρα $\quad -\frac{2}{e} + 1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 2e - 5$

ΘΕΜΑ 22

Έστω $\mathbf{f: R \to R \setminus \{0\}}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν

$$\frac{f''(x-\alpha)}{f(x-\alpha)} = \frac{f''(x+\alpha)}{f(x+\alpha)}$$

. Να υπολογιστεί:

$$\begin{vmatrix} f(-\alpha) & f(\alpha) \\ f'(-\alpha) & f'(\alpha) \end{vmatrix} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{f(x-\alpha)\,f(x+\alpha)}$$

Λύση

$$\frac{f''(x-\alpha)}{f(x-\alpha)} = \frac{f''(x+\alpha)}{f(x+\alpha)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f(x-\alpha) & f(x+\alpha) \\ f''(x-\alpha) & f''(x+\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

οπότε $\quad \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f(x-\alpha) & f(x+\alpha) \\ f'(x-\alpha) & f'(x+\alpha) \end{vmatrix} = 0$

Άρα $\quad \begin{vmatrix} f(x-\alpha) & f(x+\alpha) \\ f'(x-\alpha) & f'(x+\alpha) \end{vmatrix} = c \quad$ για κάθε $\quad x \in R \quad$ οπότε

$$\begin{vmatrix} f(-\alpha) & f(\alpha) \\ f'(-\alpha) & f'(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x-\alpha) & f(x+\alpha) \\ f''(x-\alpha) & f'(x+\alpha) \end{vmatrix} = c$$

$$\begin{vmatrix} f(-\alpha) & f(\alpha) \\ f'(-\alpha) & f'(\alpha) \end{vmatrix} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{f(x-\alpha)\,f(x+\alpha)} =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\frac{f(x+\alpha)}{f(x-\alpha)}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f(x-\alpha) & f(x+\alpha) \\ f'(x-\alpha) & f'(x+\alpha) \end{vmatrix}}{f^2(x-\alpha)} dx =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\left(\frac{f(x+\alpha)}{f(x-\alpha)}\right)'}{\frac{f(x+\alpha)}{f(x-\alpha)}} dx = \left[\ln\left|\frac{f(x+\alpha)}{f(x-\alpha)}\right|\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \ln\left|\frac{f(2\alpha)}{f(0)}\right| - \ln\left|\frac{f(0)}{f(-2\alpha)}\right| = \ln\left|\frac{f(2\alpha)}{f(0)} \cdot \frac{f(-2\alpha)}{f(0)}\right| = \ln\left|\frac{f(2\alpha)\, f(-2\alpha)}{f(0)}\right|$$

ΘΕΜΑ 23.

Έστω το πολυώνυμο $\mathbf{P(x) = \alpha x^2 + \beta x + c}$.

Αν $\displaystyle\int_0^1 x^\nu P(x)\, dx = 1 - \frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$ όπου $\nu = 1,2,3$ τότε η προηγούμενη ισότητα αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

Θέτουμε: $\varphi(\nu) = 1 - \int_0^1 x^\nu P(x)\, dx$ για κάθε $\nu \in N$

$\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)$ οπότε $\varphi(\nu) = (\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)Q(\nu)$

Όμως $\varphi(\nu) = 1 - \int_0^1 (\alpha x^{\nu+2} + \beta x^{\nu+1} + c x^\nu)\, dx =$

$$= 1 - \alpha\left[\frac{x^{\nu+3}}{\nu+3}\right]_0^1 - \beta\left[\frac{x^{\nu+2}}{\nu+2}\right]_0^1 - c\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \left(\frac{\alpha}{\nu+3} + \frac{\beta}{\nu+2} + \frac{c}{\nu+1}\right) = \frac{P(\nu)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

όπου $P(\nu)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με συντελεστή του ν^3 να είναι 1. Συνεπώς:

$$Q(\nu) = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)+(\nu+3)}$$

Άρα

$$1 - \int_0^1 x^\nu P(x)\,dx = \frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in N$$

ΘΕΜΑ 24

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f:[1,\infty) \to R}$ με $\mathbf{f(x) = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt}$

(i) Αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι θετική και φθίνουσα στο $\mathbf{[1,\infty)}$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\mathbf{f(x+1) = x\, f(x) - \frac{1}{e}}$

Λύση

(i) $e^{-t}\, t^{x-1} \geq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $x \in [1,\infty)$ οπότε

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \geq 0$$

Άρα $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1,\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in [1,\infty)$, με $x_1 < x_2$. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε $0 \leq t \leq 1$ οπότε $t^{x_1-1} \geq t^{x_2-1}$.

Άρα $e^{-t}\, t^{x_1-1} \geq e^{-t}\, t^{x_2-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-t}\, t^{x_1-1}\, dt \geq \int_0^1 e^{-t}\, t^{x_2-1}\, dt \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Άρα η f είναι φθίνουσα.

(ii) $f(x+1) = \int_0^1 e^{-t} t^x \, dt = -\int_0^1 (e^{-t})' t^x \, dt =$

$$= -\left[e^{-t} t^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} x t^{x-1} \, dt =$$

$$= -\frac{1}{e} + x \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \, dt = x f(x) - \frac{1}{e}$$

ΘΕΜΑ 25

(i) Αποδείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $\mathbf{g(x) > 0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx \leq \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \{f(x)\} \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$$

$$\int_\alpha^\beta |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \{|f(x)|\} \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$$

(ii) Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων, με $\mathbf{g}$ να μην είναι θετική και

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx \right| > \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \{|f(x)|\} \left| \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \right|$$

Λύση

(i) Έχουμε $f(x) \leq \max\limits_{\alpha \leq x \leq \beta} \{f(x)\}$ και $g(x) > 0$

Άρα $f(g)\, g(x) \leq \max\limits_{\alpha \leq x \leq \beta} \{f(x)\}\, g(x)$

και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx \le \max_{\alpha\le x\le\beta}\{f(x)\}\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

Όμοια $|f(x)|\,|g(x)| \le \max_{\alpha\le x\le\beta}\{|f(x)|\}\,|g(x)| \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)\,g(x)|\,dx \le \max_{\alpha\le x\le\beta}\{|f(x)|\}\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

(ii) $f(x)=x$, $g(x)=2x-1$, $\alpha=0$, $\beta=1$

$$\left|\int_0^1 (2x^2-x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = \frac{1}{6}$$

$$\left|\int_0^1 (2x-1)\,dx\right| = 0 \ , \quad \max_{\alpha\le x\le\beta}\{x\} = 1$$

ΘΕΜΑ 26

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ παραγωγίσιμη με $\mathbf{f(x)>0}$ και ισχύει:

$\mathbf{\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1998f(x)}$. Αν $\mathbf{f(\beta)=1998f(\alpha)}$ να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\mathbf{I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}$.

Λύση

Έχομε: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = 1998\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

δηλαδή $\displaystyle I = \frac{1}{1998}\int_{\alpha}^{\beta} (\ln f(x))'\,dx = \frac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{1998} = \frac{\ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}}{1998} = \frac{\ln 1998}{1998}$

ΘΕΜΑ 27

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^{2\pi} \min(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\, dx}$

Λύση

$$I = \int_0^{2\pi} \min(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\, dx$$

Είναι: $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\eta\mu\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} =$

$= 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > 0$, όταν $0 < x - \frac{\pi}{4} < \pi \iff \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

Άρα για $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ είναι $\min(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x$

$$I = \int_0^{\pi/4} \eta\mu x\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sigma\upsilon\nu x\, dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \eta\mu x\, dx =$$

$$= \Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[\eta\mu x\Big]_{\pi/4}^{4\pi/4} + \Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_{5\pi/4}^{2\pi} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{5\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu 2\pi =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 28

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

(i) $I_\nu = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x + \nu x^\nu}$ όπου $\alpha, \beta > 1$ και $\nu \in N$, $\nu \geq 2$

(ii) $\lim_{\nu \to \infty} I_\nu$

Λύση

i) $\frac{1}{x + \nu x^\nu} = \frac{x^{-\nu}}{x^{-\nu+1} + \nu} = \frac{1}{-\nu+1} \frac{(x^{-\nu+1} + \nu)'}{x^{-\nu+1} + \nu}$

$$I_\nu = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x + \nu x^\nu} = \frac{1}{-\nu+1} \int_\alpha^\beta \frac{(x^{-\nu+1} + \nu)'}{x^{-\nu+1} + \nu} dx =$$

$$= \frac{1}{-\nu+1} \Big[\ln(\nu + x^{-\nu+1}) \Big]_\alpha^\beta = \frac{1}{-\nu+1} \ln \frac{\beta + \beta^{-\nu+1}}{\nu + \alpha^{-\nu+1}} =$$

$$= \frac{1}{-\nu+1} \ln \frac{1 + \frac{\beta}{\nu \cdot \beta^\nu}}{1 + \frac{\alpha}{\nu \cdot \alpha^\nu}}$$

(ii) $\lim_{\nu \to \infty} I_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{-\nu+1} \ln \frac{1 + \frac{\beta}{\nu - \beta^\nu}}{1 + \frac{\alpha}{\nu - \alpha^\nu}} = 0$

ΘΕΜΑ 29

Αποδείξτε ότι: $\frac{20\sqrt{2}}{25} = \int_0^2 \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\quad x \geq 0$

Λύση

Έστω $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}$ $\quad f(0) = 0$

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2\,\eta\mu^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \eta\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \geq 0\,, \quad \delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad \eta\mu x \leq x \quad \gamma\iota\alpha \quad x \geq 0$$

Άρα η f είναι αύξουσα και $f(x) \geq f(0) = 0$

Συνεπώς $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$

Έχουμε: $\sqrt{x} - \frac{x^{5/2}}{6} \leq \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}$, οπότε

$$\int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x^{5/2}}{6}\right) dx \leq \int_0^2 \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}\, dx \leq \int_0^2 \sqrt{x}\, dx$$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x^{5/2}}{6}\right) dx \leq \int_0^2 x^{1/2}\, dx - \frac{1}{6}\int_0^2 x^{5/2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 - \frac{1}{6}\left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{21}\sqrt{2^7} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{21}8\sqrt{2} = \frac{20\sqrt{2}}{21}$$

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ΘΕΜΑ 30

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int \sqrt{x^2+1}\, dx}$

Λύση

Έχουμε $I=\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'\,dx=$$

$$\int x\,(\sqrt{x^2+1})'\,dx+\ln(x+\sqrt{x^2+1})=$$

$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2I=x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Άρα $I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$

ΘΕΜΑ 31

Αποδείξτε ότι: $\mathbf{2\sqrt{e}\le\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\le 1+e}$

Λύση

Έστω $f:[0,1]\to R$, με $f(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$

$f'(x)=2x\,(e^{x^2}-e^{1-x^2})$

x	0		$\sqrt{2}/2$		1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+e$	$\searrow$	$2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$1+e$

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$2\sqrt{e} \le f(x) \le 1+e \ , \quad x \in [0,1] \quad \text{οπότε}$$

$$\int_0^1 2\sqrt{e}\, dx \le \int_0^1 f(x)\, dx \le \int_0^1 (1+e)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1-x^2} dx \le 1+e$$

ΘΕΜΑ 32

Να υπολογιστεί το όριο: $\mathbf{I = \lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{\nu} k\,\eta\mu \dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\nu} k\,\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}}$

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \dfrac{1}{\nu} f\left(\dfrac{k}{\nu}\right) = \int_0^1 f(t)\, dt$ οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\nu} k\,\eta\mu\dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\nu} k\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu^2\sum\limits_{k=1}^{\nu}\dfrac{1}{\nu}\dfrac{k}{\nu}\eta\mu\dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}{\nu^2\sum\limits_{k=1}^{\nu}\dfrac{1}{\nu}\dfrac{k}{\nu}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi k^2}{2\nu^2}}=$$

$$=\frac{\int_0^1 x\,\eta\mu\dfrac{\pi}{2}x^2\,dx}{\int_0^1 x\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}x^2\,dx}=\frac{I_1}{I_2}$$

Θέτουμε $\frac{\pi}{2}x^2=t$ οπότε $\pi x dx = dt$. Άρα

$$I_1=\int_0^1 x\,\eta\mu\frac{\pi}{2}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\eta\mu t\,dt=-\frac{1}{\pi}\Big[\sigma\upsilon\nu t\Big]_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu 0\right)=\frac{1}{\pi}$$

$$I_2=\int_0^1 x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu t\,dt=-\frac{1}{\pi}\Big[\eta\mu t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}$$

Άρα $I=\frac{1/\pi}{1/\pi}=1$

ΘΕΜΑ 33

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I}=\int_0^{\alpha}\frac{(\alpha-t)^{\nu-1}}{(\alpha+t)^{\nu+1}}\,dt\ ,\ \alpha\in\mathbf{R}^*\ ,\ \nu\in\mathbf{N}^*$$

Λύση

Θέτουμε $t = \alpha\sigma\upsilon\nu x$ κι έχουμε $dt = -\alpha\eta\mu x dx$

$$I = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{(\alpha - \alpha\, \sigma\upsilon\nu x)^{\nu-1}}{(\alpha + \alpha\, \sigma\upsilon\nu x)^{\nu+1}}\, \alpha\, \eta\mu x\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\alpha - \alpha\, \sigma\upsilon\nu x}{\alpha + \alpha\, \sigma\upsilon\nu x}\right)^{\nu-1} \frac{1}{(\alpha + \alpha\, \sigma\upsilon\nu x)^2}\, \alpha\, \eta\mu x dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{2\,\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{2\,\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\alpha\,(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}\, \eta\mu x dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\pi/2} \left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)^{2\nu-2} \frac{1}{4\,\sigma\upsilon\nu^4 \frac{x}{2}}\, \eta\mu x dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\pi/2} \left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \frac{1}{4\,\dfrac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}\; \sigma\upsilon\nu^4 \frac{x}{2}}\, 2\eta\mu \frac{x}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\pi/2} \left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \frac{dx}{2\,\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\pi/2} \left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2\nu\alpha}\int_{0}^{\pi/2} \left[\left(\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right)^{2\nu}\right]' dx = \frac{1}{2\nu\alpha}\left[\varepsilon\varphi^{2\nu} \frac{x}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{2\nu\alpha}\,[1 - 0] = \frac{1}{2\nu\alpha}$$

ΘΕΜΑ 34

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$\mathbf{f(x) = \int_{0}^{x} e^{t^2}\,(t^3 - 3t + 2)\, dt}$$

Λύση

$g(t) = e^{t^2}(t^3 - 3t + 2)$ Η g είναι συνεχής στο R, οπότε έχει αρχικές.
Έστω G μια αρχική της g. Είναι $G'(x) = g(x)$
Είναι $f(x) = G(x) - G(0)$.Η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = G'(x) - G'(0) = G'(x) = g(x) = e^{x^2}(x^3 - 3x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ και } x_2 = 1$$

x		-2		1	
f′(x)	−	0	+	0	+
f(x)	↘	f(-2) T.E.	↗	f(1)	↗

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = -2$

ΘΕΜΑ 35

Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες:

(i) $$\ln\frac{3}{4} \le \int_0^1 \ln(x^2 - x + 1)\,dx \le 0$$

(ii) $$2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_0^1 e^{1-x^2}\,dx \le 1 + e$$

Λύση

(i) Έστω $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$, $x \in [0, 1]$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$

x	0		1/2		1
f′(x)		−	0	+	
f(x)	ln 1	↘	ln 3/4	↗	ln 1

Έχουμε $m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le M(\beta-\alpha)$

$m = \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$

Έχουμε

$\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \ln\frac{3}{4}$ και $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$

Άρα $\ln\frac{3}{4} \le \int_0^1 \ln(x^2-x+1)\,dx \le 0$

(ii) Έστω $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$, $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - e^{1-x^2}\right)$

x	0		$\sqrt{2}/2$		1
f′(x)	0	−	0	+	
f(x)	1+e	↘	$2\sqrt{e}$	↗	1+e

Άρα $2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_0^1 e^{1-x^2}\,dx \le 1+e$

ΘΕΜΑ 36

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta |x^2-1|\, e^{-x}\,dx$

Λύση

Θεωρούμε $\beta>1$ και έχουμε:

$$I = \int_0^\beta |x^2-1|\, e^{-x}\,dx = \int_0^1 |x^2-1|\, e^{-x}\,dx + \int_1^\beta |x^2-1|\, e^{-x}\,dx =$$

$$\int_0^1 (1-x^2)\, e^{-x}\, dx + \int_1^\beta (x^2-1)\, e^{-x}\, dx =$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx - \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_1^\beta x^2 e^{-x} dx - \int_1^\beta e^{-x} dx \quad \text{αλλά το}$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

Άρα $I = \left[-e^{-x}\right]_0^1 + \left[e^{-x}\right]_1^\beta + \left[(x^2+2x+2)\, e^{-x}\right]_0^1 - \left[(x^2+2x+2)\, e^{-x}\right]_1^\beta =$

$$= 8e^{-1} - 1 - (\beta^2 + 2\beta + 1)\, e^{-\beta}$$

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta (x^2-1)\, e^{-x} dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{8}{e} - 1 - \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{e^\beta}\right) = \frac{8-e}{e}$$

ΘΕΜΑ 37

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{|e^x - \alpha| + 1}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\alpha \in (-\infty, 1)$. Τότε $e^x \geq 1 > \alpha$ οπότε $|e^x - \alpha| = e^x - \alpha$. Έχουμε

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \alpha + 1} = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \frac{e^x - \alpha + 1 - e^x}{e^x - \alpha + 1} dx =$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - \alpha + 1} dx\right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \left[\ln(e^x - \alpha + 1)\right]_0^1\right) =$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \ln(e - \alpha + 1) + \ln(2-\alpha)\right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 + \ln\frac{2-\alpha}{e - \alpha + 1}\right)$$

(ii) $\alpha \in [1, e]$. Τότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{|e^x-\alpha|+1} = \int_0^{\ln\alpha} \frac{dx}{-e^x+\alpha+1} + \int_{\ln\alpha}^1 \frac{dx}{e^x-\alpha+1}$

$$= -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{\ln\alpha} \frac{e^x-\alpha-1-e^x}{e^x-\alpha-1}dx + \int_{\ln\alpha}^1 \frac{dx}{e^x-\alpha+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\Big[x-\ln|e^x-\alpha-1|\Big]_0^{\ln\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\Big[x-\ln|e^x-\alpha+1|\Big]_{\ln\alpha}^1 =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}(\ln\alpha-\ln 1+\ln|-\alpha|) + \frac{1}{1-\alpha}(1-\ln(e-\alpha+1)-\ln\alpha+\ln 1) =$$

$$= \frac{2\ln\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{1-\alpha}(1-\ln(e-\alpha+1)-\ln\alpha)$$

(iii) $\alpha \in (e, \infty)$. Τότε $|e^x-\alpha| = \alpha-e^x$ και

$$\int_0^1 \frac{dx}{-e^x+\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 \frac{-e^x+\alpha+1+e^x}{-e^x+\alpha+1}dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{-e^x}{-e^x+\alpha+1}dx\right) = \frac{1}{\alpha+1}\Big[x-\ln(-e^x+\alpha+1)\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}(1-\ln(-e+\alpha+1)+\ln\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\ln\frac{-e+\alpha+1}{\alpha}\right)$$

ΘΕΜΑ 38

Έστω $\mathbf{f}: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ με $\displaystyle \mathbf{f(x)} = \int_0^x \frac{(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)\,\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα και να αποδειχθεί ότι η **f** είναι **"1-1"** και $\mathbf{f}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, \infty)$

Λύση

$$f(x)=\int_0^x \frac{ημ^2 t}{συν^2 t}dt+\int_0^x \frac{ημt\,συνt}{συν^2 t}dt=$$

$$=\int_0^x \frac{1-συν^2 t}{συν^2 t}dt+\int_0^x \frac{ημT}{συνt}dt=$$

$$=\int_0^x \frac{dt}{συν^2 t}-\int_0^x dt-\int_0^x \frac{(συνt)'}{συνt}dt=$$

$$=\Big[εφt\Big]_0^x-x-\Big[\ln(συνt)\Big]_0^x=εφx-x-\ln(συνx)$$

Άρα $f(x)=εφx-x-\ln(συνx)$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=εφ^2x+εφx$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα "1-1" για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$

Άρα $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=(0,\infty)$

ΘΕΜΑ 39

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση **f** για την οποία ισχύουν: $\mathbf{f(1)=1}$ με $\mathbf{f(x)>0}$ και $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{f(xt)\,dt=1998f(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Λύση

Θέτουμε $xt=u \Rightarrow xdt=du$

Για $t=0$ έχουμε $u=0$

Για $t = 1$ έχουμε $u = x$ με $x \neq 0$

Επομένως $\int_0^x \frac{1}{x} f(u)\,du = 1998 f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^x f(u)\,du = 1998 x f(x)$

Άρα $f(x) = 1998\, f(x) + 1998x\, f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1997}{1998x}$

δηλαδή $(\ln f(x))' = \left(-\frac{1997}{1998} \ln|x|\right)'$

Άρα $\ln f(x) = -\frac{1997}{1998} \ln|x| + c$

Για $x = 1$ $\ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f(x) = e^{-\frac{1997}{1998}\ln|x|}$

ΘΕΜΑ 40

Υποθέτουμε ότι η **f** είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\alpha]$ και υποθέτουμε ότι $\mathbf{f(x)=f(\alpha-x)}$ και $\mathbf{g(x)-g(\alpha-x)=4000}$ για όλα τα $\mathbf{x}$ μέσα από το διάστημα $[0,\alpha]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha f(x)\,g(x)\,dx = 2000\int_0^\alpha f(x)\,dx$$

Απόδειξη

Θέτουμε: $\alpha - x = t$ με $t \in [0,\alpha]$ δηλαδή $x = \alpha - t$
$dx = (\alpha - t)'dt = -dt$ για $x=0$ είναι $t_1=\alpha$ για $x=\alpha$ είναι $t_2=0$.

Επομένως: $\int_0^\alpha f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^\alpha f(\alpha - x)\,(4000 + g(\alpha - x))\,dx =$

$$4000\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)\,dx - \int_0^{\alpha} f(\alpha-x)\,g(\alpha-x)\,dx = -4000\int_0^{\alpha} f(t)\,dt - \int_0^{\alpha} f(t)\,g(t)\,dt$$

Άρα $2\int_0^{\alpha} f(x)\,g(x)\,dx = -4000\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

που σημαίνει: $\int_0^{\alpha} f(x)\,g(x)\,dx = -2000\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 41

Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ισχύει η σχέση:

$$\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \right| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}$$

Λύση

Έστω $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [0, 1]$

$$\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \right| = \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (f(x) - f(t))\,dt \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f(t)|\,dt = \int_0^1 f'(c)\,|x-t|\,dt$$

όπου $c \in (x, t)$ ή $c \in (t, x)$

Θέτουμε

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$$

οπότε έχουμε $\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \right| \leq M \int_0^1 |x-t|\,dt \leq M$

$$|f'(x)| = \left| -2x\,e^{-x^2} \right| = 2x\,e^{-x^2}$$

$$g(x) = |f'(x)| \qquad g'(x) = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

x	0		$1/\sqrt{2}$		1
g(x)	0	↗	$\sqrt{2/e}$	↘	
g΄(x)		+	0	−	

Άρα $\quad M=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

ΘΕΜΑ 42

Να υπολογιστεί το όριο: $\displaystyle \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\int_1^{\nu}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \quad,\ \nu\geq 2$

Λύση

$$\int_1^{\nu}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^{\nu}x'\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\left[x\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^{\nu}-\int_1^{\nu}x\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)'dx=$$

$$=\nu\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)-\ln2+\frac{1}{2}\int_1^{\nu}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=$$

$$=\nu\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)-\ln2+\sqrt{\nu}-1-\ln(1+\sqrt{\nu})+\ln2=$$

$$=\nu\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)+\sqrt{\nu}-1-\ln(1+\sqrt{\nu})$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\int_1^{\nu}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\nu\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)+\sqrt{\nu}-1-\ln(1+\sqrt{\nu})\right]=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sqrt{\nu}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)+1-\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu}}\ln(1+\sqrt{\nu})\right)=$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\sqrt{\nu}} + 1 - \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \lim_{\nu \to \infty} \ln(1 + \sqrt{\nu})^{1/\sqrt{\nu}} =$$

$$= 1 + 1 - 0 - 1 = 1$$

ΘΕΜΑ 43

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x t^\alpha \, dt \quad , \quad \alpha \neq -1$

Λύση

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x t^\alpha \, dt}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\,x^2} =$$

$$= \begin{cases} 0 \ , & \alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{-1\} \\ \frac{1}{2} \ , & \alpha = 1 \\ +\infty \ , & \alpha > 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 44

Αποδείξτε ότι: $0 \leq \int_1^2 \frac{x-1}{x+2} dx \leq \frac{1}{4}$

Λύση

Έστω $f: [1, 2] \to R$ με $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ $\quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $f(1) \le f(x) \le f(2)$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Συνεπώς $\int_1^2 f(1)\,dx \le \int_1^2 f(x)\,dx \le \int_1^2 f(2)\,dx \iff$

$$0 \le \int_1^2 \frac{x-1}{x+2}\,dx \le \int_1^2 \frac{1}{4}\,dx \iff$$

$$0 \le \int_1^2 \frac{x-1}{x+2}\,dx \le \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 45

Αποδείξτε ότι: $\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx \le e}$, όπου $\mathbf{f(x) = (1+x)^{1/x}}$, $\mathbf{x > 0}$ και $\mathbf{f(0) = e}$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{x}(1+x)^{1/x-1} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^{1/x}\ln(1+x) =$$

$$= \frac{(1+x)^{1/x}}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2}(1+x)^{1/x}\ln(1+x) =$$

$$= \frac{(1+x)^{1/x}}{x^2}\left[\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right]$$

Έστω $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(x+1)^2} < 0$$

Άρα για $x>0$ είναι $g(x) < g(0) = 0$ και $f'(x) < 0$. Συνεπώς για $x>0$ η f είναι φθίνουσα και $f(x) < f(0) \iff (x+1)^{1/x} < e$

Άρα $\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 e\,dx = e$

ΘΕΜΑ 46

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx+\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx}$$

Λύση

$I_1=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$ Θέτουμε $y=\frac{\pi}{2}-x$ οπότε $dy=-dx$.

Είναι $I_1=-\int_{\pi/4}^{0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}dy=\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu^2 y}dy$

Άρα $I=\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx+\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Θεωρούμε $\sigma\upsilon\nu x=t$, οπότε $-\eta\mu x dx=dt$

Άρα $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=-\int_{1}^{\sqrt{2}/2} t^{-2}dt=\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^{-2}dt=$

$$=\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1}=\left[\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{-1}}{-1}\right]=\left(-1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}-1$$

Άρα $I=2(\sqrt{2}-1)$

ΘΕΜΑ 47

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^5 x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\varphi^3 x\, dx}$

Λύση

Έστω $I_1 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\varphi^3 x\, dx$ Θέτουμε $y = \frac{\pi}{2} - x$ και έχουμε $dy = -dx$

Οπότε $I_1 = -\int_{\pi/4}^{0} \sigma\varphi^3\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 y\, dy$

Άρα $I = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^5 x\, dx + \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi^5 x + \varepsilon\varphi^3 x)\, dx =$

$= \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x\,(1 + \varepsilon\varphi^2 x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x \left(1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx =$

$= \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi x)'\, \varepsilon\varphi^3 x\, dx =$

$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} 4\,(\varepsilon\varphi x)'\, \varepsilon\varphi^3 x\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi^4 x)'\, dx =$

$= \frac{1}{4} \left[\varepsilon\varphi^4 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ 48

Αποδείξτε ότι: $\mathbf{\frac{1}{e} \leq \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx \leq 2}$

Λύση

Έχουμε $m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq M(\beta-\alpha)$ *(1)*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$, $x \in [-1, 1]$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$

x	-1		0		1
f΄(x)		+	0	−	
f(x)	1/e	↗	1	↘	1/e

Άρα $m=\frac{1}{e}$, $M = 1$, οπότε η *(1)* γράφεται:

$$\frac{1}{e}(1+1) \leq \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \leq 1\,(1+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \leq 2$$

ΘΕΜΑ 49

Αποδείξτε ότι: $\mathbf{1 \leq \int_{0}^{1} e^{x^2}\,dx \leq e}$

Λύση

Έστω $f(x)=e^{x^2}$, $f'(x)=2xe^{x^2}$, $x \in [0, 1]$

x	0		1
f΄(x)	0	+	
f(x)	1	↗	e

Ισχύει η σχέση $m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq M(\beta-\alpha)$

οπότε $1\,(1-0) \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e\,(1-0) \Leftrightarrow$

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e$$

ΘΕΜΑ 50

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$\mathbf{f(t) = \int_0^t e^{x^4}\,(x^2 - 3x + 2)\,dx}$$

Λύση

$$f'(t) = e^{t^4}\,(t^2 - 3t + 2)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$f''(t) = e^{t^4}\,(4t^5 - 12t^4 + 8t^3 + 2t - 3)$$

$$f''(1) = -e < 0$$

$$f''(2) = e^{16} > 0$$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο t=2 και τοπικό μέγιστο στο t=1.

ΘΕΜΑ 51

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f: [1,\infty) \to R}$ με $\mathbf{f(x) = \int_0^1 e^{-t}\,t^{x-1}\,dt}$.

(i) Αποδείξτε ότι η **f** είναι θετική και φθίνουσα στο $[1,\infty)$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\mathbf{f(x+1) = x\,f(x) - \frac{1}{e}}$

Λύση

(i) $e^{-t}t^{x-1} \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$ και $x \in [1,\infty)$, οπότε $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt \geq 0$

Άρα $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1,\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in [1,\infty)$, με $x_1 < x_2$. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε $0 \leq t \leq 1$ οπότε $t^{x_1-1} \geq t^{x_2-1}$. Άρα

$$e^{-t}t^{x_1-1} \geq e^{-t}t^{x_2-1} \Rightarrow \int_0^1 e^{-t}t^{x_1-1}\,dt \geq \int_0^1 e^{-t}t^{x_2-1}\,dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Άρα η f είναι φθίνουσα.

(ii) $f(x+1) = \int_0^1 e^{-t}t^x\,dt = -\int_0^1 (e^{-t})'\,t^x\,dt =$

$$= -\Big[e^{-t}t^x\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}x\,t^{x-1}\,dt = -\frac{1}{e} + x\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\,f(x) - \frac{1}{e}$$

ΘΕΜΑ 52

Έστω **f** μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με **f′** συνεχής. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Για κάθε $\mathbf{x \in R}$, $\mathbf{f(2x) = 2f(x)f'(x)}$

(ii) Για κάθε $\mathbf{x \in R}$, $\mathbf{\int_0^{2x} f(t)\,dt = 2f^2(x) - 2f^2(0)}$

Απόδειξη

- Έστω $f(2x) = 2f(x)f'(x)$. Τότε για $\alpha > 0$ έχουμε:

$$\int_0^\alpha f(2x)\,dx = \int_0^\alpha 2f(x)\,f'(x)\,dx = \int_0^\alpha \left(f^2(x)\right)'\,dx =$$

$$= \left[f^2(x)\right]_0^\alpha = f^2(\alpha) - f^2(0)$$

Θέτουμε $2x = t$, οπότε $dx = \frac{1}{2}dt$ και έχουμε:

$$\int_0^\alpha f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\alpha} f(t)\,dt = f^2(\alpha) - f^2(0)$$

Άρα $\int_0^{2\alpha} f(t)\,dt = 2f^2(\alpha) - 2f^2(0)$. Θέτουμε $\alpha = x$, οπότε:

$$\int_0^{2x} f(t)\,dt = 2f^2(x) - 2f^2(0)$$

- Έστω ότι $\int_0^{2x} f(t)\,dt = 2f^2(x) - 2f^2(0)$. Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$\left(\int_0^{2x} f(t)\,dt\right)' = 4f'(x)\,f(x) \Rightarrow 2f(2x) = 4f'(x)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2x) = 2f'(x)f(x)$$

ΘΕΜΑ 53

Έστω $\mathbf{I_\nu = \int_0^1 (2x-1)^\nu e^{x-x^2}\,dx}$, $\mathbf{\nu \in N}$. Αποδείξτε ότι $\mathbf{I_{2\nu+1} = 0}$.

Λύση

$$I_\nu = \int_0^1 (2x-1)^\nu e^{x-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{(2x-1)^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' e^{x-x^2}\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{\nu+1}}{\nu+1}(1-2x)\,e^{x-x^2}\,dx=$$

$$\frac{1}{2(\nu+1)}-\frac{(-1)^{\nu+1}}{2(\nu+1)}+\frac{1}{2(\nu+1)}\int_0^1(2x-1)^{\nu+2}\,e^{x-x^2}\,dx=$$

Άρα $\frac{1}{2(\nu+1)}-\frac{(-1)^{\nu+1}}{2(\nu+1)}+\frac{1}{2(\nu+1)}I_{\nu+2}=I_\nu \Leftrightarrow$

$$2(\nu+1)\,I_\nu=1-(-1)^{\nu+1}+I_{\nu+2} \Leftrightarrow$$

$$I_{\nu+2}=2(\nu+1)\,I_\nu+[(-1)^{\nu+1}-1]$$

Για $\nu=2k+1$ είναι $I_{2k+3}=4(k+1)\,I_{2k+1}$ *(1)*

Αν στην *(1)* θέσουμε $k=0,1,\ldots,k\text{-}1$, έχουμε αντίστοιχα

$$I_3=4\cdot1\cdot I_1$$

$$I_5=4\cdot2\cdot I_3=4\cdot2\,(4\cdot1\cdot I_1)=4^2\cdot1\cdot2\cdot I_1$$

$$I_7=4\cdot3\cdot I_5=4^3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot I_1$$

. . . .

$$I_{2k+1}=4\cdot k\cdot I=4^k\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k\cdot I_1$$

Όμως $I_1=\int_0^1(2x-1)\,e^{x-x^2}\,dx=-\int_0^1(1-2x)\,e^{x-x^2}\,dx=$

$$=-\int_0^1(e^{x-x^2})'\,dx=-\left[e^{x-x^2}\right]_0^1=-(e^0-e^0)=0$$

Άρα $I_{2\nu+1}=0$

ΘΕΜΑ 54

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sigma\upsilon\nu x)\,dx}$

Λύση

Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-t$ οπότε $dx = -dt$ και

$$I=-\int_{\pi/2}^{0} \ln(\eta\mu t)\,dt=\int_{0}^{\pi/2} \ln(\eta\mu t)\,dt$$

Θέτουμε $t = 2u$ και έχουμε

$$I=2\int_{0}^{\pi/4} \ln(\eta\mu 2u)\,du=2\int_{0}^{\pi/4} [\ln 2+\ln(\eta\mu u)+\ln(\sigma\upsilon\nu u)]\,du=$$

$$=2\ln 2\int_{0}^{\pi/4} du+2\int_{0}^{\pi/4} \ln(\eta\mu u)\,du+2\int_{0}^{\pi/4} \ln(\sigma\upsilon\nu u)\,du \qquad (1)$$

Θέτουμε $t=\frac{\pi}{2}-u$ και είναι

$$\int_{0}^{\pi/4} \ln(\sigma\upsilon\nu u)\,du=-\int_{\pi/2}^{\pi/4} \ln(\eta\mu t)\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu u)\,du$$

Άρα η *(1)* γίνεται:

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\left[\int_{0}^{\pi/4} \ln(\eta\mu u)\,du+\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu u)\,du\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_{0}^{\pi/2} \ln(\eta\mu u)\,du=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$$

Άρα $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2=\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 55

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I=\int_{0}^{\pi/3} x\,\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}\left[\eta\mu\frac{3x}{2}-8\,\eta\mu^3\frac{3x}{4}\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{3x}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\frac{3x}{4}\right]dx}$$

Λύση

Είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}\left[\eta\mu\frac{3x}{2} - 8\,\eta\mu^3\frac{3x}{4}\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{3x}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\frac{3x}{4}\right] =$

$$= \eta\mu\frac{3x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2} - \sigma\upsilon\nu^3\frac{3x}{2}\,\eta\mu^3\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}\,\eta\mu 3x - \frac{1}{8}\,\eta\mu^3 3x$$

Είναι $\int_0^{\pi/\nu} x\, f(\eta\mu\,\nu x)\,dx = \frac{\pi}{2\nu}\int_0^{\pi/\nu} f(\eta\mu\,\nu x)\,dx$

Άρα $I = \int_0^{\pi/3} x\left[\frac{1}{2}\eta\mu 3x - \frac{1}{8}\eta\mu^3 3x\right]dx = \frac{\pi}{6}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{1}{2}\eta\mu 3x - \frac{1}{8}\eta\mu^3 3x\right)dx =$

$$= \frac{\pi}{12}\left[-\frac{1}{3}\,\sigma\upsilon\nu 3x\right]_0^{\pi/3} - \frac{\pi}{48}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu^3 3x}{9} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3}\right]_0^{\pi/3} = \frac{5\pi}{108}$$

ΘΕΜΑ 56

Να προσδιοριστούν τα **α, β, γ** έτσι ώστε η συνάρτηση **$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{3 - 2x}$** να είναι μια αρχική της **$f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$**.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{3 - 2x} = t$ και έχουμε

$$\int x\sqrt{3 - 2x}\,dx = \int\left(\frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2}\right)dt = \frac{t^5}{10} - \frac{t^3}{2} =$$

$$= \left[\frac{(3 - 2x)^2}{10} - \frac{(3 - 2x)}{2}\right]\sqrt{3 - 2x} =$$

$$= \left(\frac{2x^2}{5} - \frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3 - 2x} + k \quad , \quad k \in R$$

Άρα $\left(\frac{2x^2}{5} - \frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3 - 2x} = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{3 - 2x}$

οπότε $\alpha=\frac{2}{5}$, $\beta=-\frac{1}{5}$, $\gamma=-\frac{3}{5}$

$$F(x)=\left(\frac{2x^2}{5}-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x}+k \quad , \quad k\in R$$

ΘΕΜΑ 57

Να βρεθούν **α, β** έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$\mathbf{F(x)=e^{-x}(\alpha\ \sigma\upsilon\nu 4x+\beta\ \eta\mu 4x)}$$

να είναι μια αρχική της συνάρτησης $\mathbf{f(x)=e^{-x}\sigma\upsilon\nu 4x}$

Λύση

$$F'(x)=e^{-x}(-4\alpha\,\eta\mu 4x+4\beta\,\sigma\upsilon\nu 4x)-e^{-x}(\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4x+\beta\,\eta\mu 4x)=$$

$$=e^{-x}[(4\beta-\alpha)\,\sigma\upsilon\nu 4x-(4\alpha+\beta)\,\eta\mu 4x]$$

$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow$

$e^{-x}[(4\beta-\alpha)\,\sigma\upsilon\nu 4x-(4\alpha+\beta)\,\eta\mu 4x]=\sigma\upsilon\nu 4x\,e^{-x}$ για κάθε $x\in R$ $\Leftrightarrow$

$(4\beta-\alpha)\,\sigma\upsilon\nu 4x-(4\alpha+\beta)\,\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 4x \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4\beta-\alpha=1\\4\alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha&=-\frac{1}{17}\\ \beta&=\frac{4}{17}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 58

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση **g:R→R** συνεχής στο **R** με **g(x)≠0** και **g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y)** *(1)* για κάθε **x,y∈ R**. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g(0)=1$

(ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} g(x)\,dx$, $\alpha \in R$

Λύση

(i) Για y=0 η *(1)* δίνει

$2g(x)=2g(x)g(0) \quad \Rightarrow \quad g(0)=1$

διότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

(ii) Για x=0 η *(1)* δίνει

$g(y)+g(-y)=2g(0)g(y) \quad \Rightarrow \quad g(y)+g(-y)=2g(y) \quad \Rightarrow \quad g)-y)=g(y)$

για κάθε $y\in R$

Άρα $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή η g είναι άρτια.

Επομένως

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} g(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 59

Έστω $\mathbf{F} = \{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{f}$ - παραγωγίσιμη

και $\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx = f(0)\,dx = f(1)} \}$

(i) Να βρεθούν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $3^{ου}$ βαθμού του συνόλου **F**.

(ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\mathbf{f'(x) = 0}$ έχει τουλάχιστον **2** πραγματικές ρίζες στο διάστημα $\mathbf{(0,1)}$ για κάθε $\mathbf{f \in F}$.

Λύση

(i) Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\alpha\neq 0$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\,dx=\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta$$

$f(0)=\delta$ και $f(1)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Άρα $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ οπότε $\alpha=2\gamma$ και $\beta=-3\gamma$

Συνεπώς $f(x)=2\gamma x^3-3\gamma x^2+\gamma x+\delta$ όπου $\gamma,\delta\in R$ και $\gamma\neq 0$

(ii) Έστω $f\in F$. Τότε αν $f(x)>f(0)=f(1)$ για κάθε $x\in(0,1)$, είναι

$$\int_0^1 f(x)\,dx>\int_0^1 f(0)\,dx=f(0) \quad (\text{άτοπο})$$

Αν $f(x)<f(0)=f(1)$ για κάθε $x\in(0,1)$, τότε

$$\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 f(0)\,dx=f(0) \quad (\text{άτοπο})$$

Συνεπώς υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(0)=f(1)$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχουν $x_1\in(0,\xi)$ και $x_2\in(\xi,1)$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

ΘΕΜΑ 60

Αποδείξτε ότι: $$\mathbf{2\ln\frac{3}{2}\leq\int_2^3 \eta\mu\frac{\pi}{x}\,dx\leq\pi\ln\frac{3}{2}}$$

Λύση

Έστω $g(x)=\eta\mu\frac{\pi}{x}-\frac{2}{x}$, $x\in[2,3]$

$$g'(x)=-\frac{\pi}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{\pi}{x^2}\left(\frac{2}{\pi}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)>0$$

διότι $0 \le \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x} \le \frac{1}{2} < \frac{2}{\pi}$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο [2,3],

οπότε $g(x) \ge g(2) = 0 \iff \eta\mu\frac{\pi}{x} \ge \frac{2}{x}$

Συνεπώς $\int_2^3 \eta\mu\frac{\pi}{x}dx \ge \int_2^3 \frac{2}{x}dx = \Big[2\ln x\Big]_2^3 = 2\ln\frac{3}{2}$

Είναι $\eta\mu\frac{\pi}{x} \le \frac{\pi}{x}$, για κάθε $x \in [2,3]$

οπότε $\int_2^3 \eta\mu\frac{\pi}{x}dx \le \int_2^3 \frac{\pi}{x}dx = \pi\Big[\ln x\Big]_2^3 = \pi\ln\frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 61

Να δείξετε ότι: $\mathbf{I = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\ln 2}{\sqrt{3}}}$

Λύση

$$2\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{2\,\sigma\upsilon\nu 2x+1}{2}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\,\sigma\upsilon\nu 2x+1}{2}$ είναι άρτια, οπότε έχουμε

$$I = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\int_0^{\pi/6} \frac{2dx}{2\,\sigma\upsilon\nu 2x+1} = 4\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{2\,\sigma\upsilon\nu 2x+1}$$

Θέτουμε $\varepsilon\varphi x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = 4\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{2\,\sigma\upsilon\nu 2x+1} = 4\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{3-t^2} = \frac{4}{2\sqrt{3}}\left[\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{3}+t} + \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{3}-t}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{3}t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{3}t-1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\ln(t+\sqrt{3})\Big]_0^{1/\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\ln(\sqrt{3}-t)\Big]_0^{1/\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\ln\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\sqrt{3}\right] - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\ln\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\sqrt{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln 2$$

ΘΕΜΑ 62

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathbf{max(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\,dx}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x^5\,dx}}{\mathbf{(1+x^3)^2}}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x^9}}{\mathbf{(1+x^5)^3}}\,\mathbf{dx}$

Λύση

(i) Είναι $\displaystyle\max_{0\le x\le \pi/2} (\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x\ , & \alpha\nu\ x\in[0, \frac{\pi}{4}] \\ \eta\mu x\ , & \alpha\nu\ x\in[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

Άρα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \max(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \eta\mu x dx = \sqrt{2}$

(ii) Θέτουμε $1+x^3 = t \Rightarrow 3x^2dx = dt$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{x^3\,3x^2\,dx}{(1+x^3)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{t^2}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+\frac{1}{3\,(x^3+1)}+c$$

(iii) Θέτουμε $1+x^5=t \Rightarrow 5x^4dx=dt$

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{x^5\,5x^4}{(1+x^5)^3}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{t-1}{t^3}\,dt=\frac{1}{5}\int t^{-2}\,dt-\frac{1}{5}\int t^{-3}\,dt=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{2t^2}\right)=\frac{1}{10t^2}-\frac{1}{5t}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2\,(1+x^5)^2}-\frac{1}{1+x^5}\right]+c$$

ΘΕΜΑ 63

Να δείξετε ότι: $\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{4x+5}{x+1}}\,dx=$

$$=\int_1^2\sqrt{4x^2-16x+17}\,dx=\int_2^3\sqrt{1+(2x-4)^2}\,dx$$

Λύση

Έστω

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{4x+5}{x+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{4+\frac{1}{x+1}}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4\,(x+1)}}\,dx$$

Θέτουμε $t=4(x+1) \Rightarrow dt=4dx$

$$I_1=\frac{1}{4}\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{t}}\,dt$$

Έστω $I_2=\int_1^2\sqrt{4x^2-16x+17}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+(2x-4)^2}\,dx$

Θέτουμε $1+(2x-4)^2=y \Rightarrow y-1=(2x-4)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-1}=2x-4 \Rightarrow$

$$1+(2x-4)^2=y \;\Rightarrow\; y-1=(2x-4)^2 \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{y-1}=2x-4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=2\pm\frac{\sqrt{y-1}}{2}$$

Όμως $x\in[1,2] \;\Rightarrow\; x=2-\dfrac{\sqrt{y-1}}{2} \;\Rightarrow\; dx=-\dfrac{dy}{4\sqrt{y-1}}$

$$I_2=-\frac{1}{4}\int_5^1\sqrt{\frac{y}{y-1}}\,dy=-\frac{1}{4}\int_5^1\sqrt{1+\frac{1}{y-1}}\,dy=\frac{1}{4}\int_1^5\sqrt{1+\frac{1}{y-1}}\,dy$$

Θέτουμε $y-1=t \;\Rightarrow\; dy=dt \;\Rightarrow\; I_2=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{t}}\,dt$

Άρα $I_1=I_2$

Έστω $I_3=\displaystyle\int_2^3\sqrt{1+(2x-4)^2}\,dx$

Θέτουμε $2x-4=t \;\Rightarrow\; dx=\dfrac{dt}{2}$

$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt$$

Όμως $I_2=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+(2x-4)^2}\,dx$ και αν θέσουμε $t=2x-4 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; I_2=\frac{1}{2}\int_{-2}^0\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt \;\Rightarrow\; I_2=I_3=I_1$$

ΘΕΜΑ 64

Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες:

(i) $\displaystyle\int_{2\alpha}^{2b}\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_{2\alpha^2}^{2b^2}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx$ όπου $0<\alpha<b$

(ii) $\displaystyle\int_{2\nu-1}^{2\nu+1}\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_{2\nu^2-2\nu-1}^{2\nu^2+2\nu-1}\sqrt{\frac{2x+4}{2x+3}}\,dx$

όπου $\nu \geq \frac{1}{2}$

Λύση

(i) Θέτουμε $2x=z^2 \Rightarrow 2dx=2zdz \Rightarrow dx=zdz$

$$\int_{2\alpha^2}^{2b^2}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx=\int_{2\alpha}^{2b}\sqrt{\frac{z^2+1}{z^2}}\,z\,dz=\int_{2\alpha}^{2b}\frac{\sqrt{z^2+1}}{|z|}\,z\,dz=$$

$$\int_{2\alpha}^{2b}\sqrt{1+x^2}\,dx$$

(ii) Θέτουμε $2x+3=z^2 \Rightarrow dx=zdz$

Αν $x = 2\nu^2-2\nu-1 \Rightarrow$

$$z=\sqrt{4\nu^2-4\nu-2+3}=\sqrt{4\nu^2-4\nu+1}=|2\nu-1|=2\nu-1$$

Αν $x = 2\nu^2+2\nu-1 \Rightarrow$

$$z=\sqrt{4\nu^2+4\nu-2+3}=\sqrt{4\nu^2+4\nu+1}=|2\nu-1|=2\nu+1$$

$$\int_{2\nu^2-2\nu-1}^{2\nu^2+2\nu-1}\sqrt{\frac{2x+4}{2x+3}}\,dx=\int_{2\nu-1}^{2\nu+1}\sqrt{\frac{z^2+1}{z^2}}\,z\,dz=\int_{2\nu-1}^{2\nu+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

ΘΕΜΑ 65

Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\int_{x}^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt=0$

Λύση

Έστω $\eta\mu t=f(t)$ και $g(t)=\frac{1}{t}$. Τότε υπάρχει $c_x\in(x\,,2x)$ τέτοιος ώστε

$$\int_{x}^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt=\eta\mu c_x\int_{x}^{2x}\frac{1}{t}dt=\eta\mu c_x\Big[\ln t\Big]_{x}^{2x}=$$

$= \eta\mu c_x (\ln 2x - \ln x) = \eta\mu c_x \ln 2$

Όμως όταν $x \to 0$ είναι $c_x \to 0$ και $\eta\mu c_x \to 0$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{\eta\mu t}{t} dt = \lim\limits_{x \to 0} \ln 2 \, \eta\mu c_x = 0$

ΘΕΜΑ 66

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} \frac{\eta\mu^2 x}{x^4} dx = \alpha$

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Τότε υπάρχει $c_\nu \in \left(\frac{1}{\nu+\alpha}, \frac{1}{\nu}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} \frac{\eta\mu^2 x}{x^4} dx = \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2} \int_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2} \int_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} x^{-2} dx =$$

$$= \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2} \left[-\frac{1}{x} \right]_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} = \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2} [-\nu + \nu + \alpha] = \alpha \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2}$$

Όταν $\nu \to \infty$ είναι $c_\nu \to 0$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{1/\nu+\alpha}^{1/\nu} \frac{\eta\mu^2 x}{x^4} dx = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\eta\mu^2 c_\nu}{c_\nu^2} \alpha = \alpha$$

ΘΕΜΑ 67

Αν **f** συνεχής στο **R** αποδείξτε ότι:

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{1/(\nu+\alpha)^2}^{1/\nu^2} \frac{f(x)}{x^{3/2}}\,dx = 2\alpha f(0)\ ,\ \alpha > 0$$

Λύση

Ξέρουμε ότι αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,b]$ και η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,b]$ τότε υπάρχει $\gamma \in [\alpha,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,g(x)\,dx = f(\gamma)\int_{\alpha}^{b} g(x)\,dx$$

Έστω $g(x) = x^{-3/2}$. Τότε υπάρχει $\gamma_\nu \in \left[\frac{1}{(\nu+\alpha)^2}, \frac{1}{\nu^2}\right]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{1/(\nu+\alpha)^2}^{1/\nu^2} \frac{f(x)}{x^{3/2}}\,dx = f(\gamma_\nu)\int_{1/(\nu+\alpha)^2}^{1/\nu^2} x^{-3/2}\,dx = f(\gamma_\nu)\left[\frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_{1/(\nu+\alpha)^2}^{1/\nu^2} =$$

$$= -2f(\gamma_\nu)\,[\nu-\nu-\alpha] = -2f(\gamma_\nu)\,(-\alpha) = 2\alpha f(\gamma_\nu)$$

Για $\nu \to \infty$ είναι $\gamma_\nu \to 0$, οπότε $f(\gamma_\nu) \to f(0)$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{1/(\nu+\alpha)^2}^{1/\nu^2} \frac{f(x)}{x^{3/2}}\,dx = \lim_{\nu \to \infty} 2\alpha f(\gamma_\nu) = 2\alpha f(0)$$

ΘΕΜΑ 68

Αν $\mathbf{P(x) = \nu(\nu-1)x^{\nu-2} + (\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3} + \ldots + 3\cdot 2x + 2\cdot 1}$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^1 \frac{x^{\nu-1} - x^{\nu-2}}{\sqrt[3]{P(x)}}\,dx \qquad \nu \geq 2}$

Λύση

Έστω $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu = \dfrac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1} + (\nu - 1) x^{\nu-2} + \ldots + 2x + 1 = \frac{(\nu + 1) x^\nu (x - 1) - (x^{\nu+1} - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$f'' = \nu (\nu - 1) x^{\nu-2} + (\nu - 1)(\nu - 2) x^{\nu-3} \ldots + 2 =$$

$$= \left[\frac{(\nu + 1) x^{\nu+1} - (\nu + 1) x^\nu - x^{\nu+1} + 1}{(x - 1)^2}\right]' = \left[\frac{\nu x^{\nu+1} - (\nu + 1) x^\nu + 1}{(x - 1)^2}\right]' =$$

$$= \frac{(\nu^2 - \nu) x^{\nu+1} - 2(\nu^2 - 1) x^\nu + \nu(\nu + 1) x^{\nu-1} - 2}{(x - 1)^3} = \frac{Q(x)}{(x - 1)^3}$$

Άρα $\sqrt[3]{P(x)} = \dfrac{\sqrt[3]{Q(x)}}{x - 1}$ και $Q'(x) = \nu (\nu^2 - 1)(x - 1)^2 x^{\nu-2}$

$$I = \int_0^1 \frac{x^{\nu-2} (x - 1)^2}{\sqrt[3]{Q(x)}} dx = \frac{1}{\nu(\nu^2 - 1)} \int_0^1 \frac{Q'(x)}{\sqrt[3]{Q(x)}} dx =$$

$$= \frac{3}{2\nu(\nu^2 - 1)} \int_0^1 \left(\sqrt[3]{Q^2(x)}\right)' dx = \frac{3}{2\nu(\nu^2 - 1)} \left[\sqrt[3]{Q^2(x)}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\nu(\nu^2 - 1)}$$

$$I = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\nu(\nu^2 - 1)}$$

ΘΕΜΑ 69

Αν $\mathbf{m}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N^*}$, να δείξετε ότι για κάθε $0 < \ln\alpha < \dfrac{m}{\nu} < \ln b$ ισχύει

$$(b-\alpha)\left(\frac{\nu}{m}\right)^m e^m \le \int_b^\alpha \frac{x^\nu}{\ln^m x}\,dx \le \max\left(\frac{\alpha^\nu}{\ln^m \alpha}, \frac{b^\nu}{\ln^m b}\right)(b-\alpha)$$

Λύση

Έστω $f:(0,\infty)\to R$, με $f(x)=\dfrac{x^\nu}{\ln^m x}$

Θα μελετήσουμε την f στο (α,b) όπου $1 < \alpha < e^{m/\nu} < b$

$$f'(x)=\frac{\nu x^{\nu-1}\ln^m x - x^\nu \dfrac{m\ln^{m-1}x}{x}}{\ln^{2m}x}=\frac{x^{\nu-1}\ln^{m-1}x\,(\nu\ln x-m)}{\ln^{2m}x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1\ ,\ x_2=e^{m/\nu}>1 \quad [x_1 \notin (\alpha,b)]$

x	1			$e^{m/\nu}$			$+\infty$
f′(x)	+	−	−	0	+	+	
f(x)	+	↘		$f(e)^{m/\nu})$ τ.ε.		↗	

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $e^{m/\nu}$, το

$$f\left(e^{m/\nu}\right)=e^m\left(\frac{\nu}{m}\right)^m=\min f$$

Όμως και $f = \max(f(\alpha),f(b))$

Αφού η f είναι συνεχής, υπάρχουν m, M τέτοιοι ώστε

$$m\,(b-\alpha)\le\int_\alpha^b \frac{x^\nu}{\ln^m x}\,dx\le M\,(b,\alpha)$$

Συνεπώς

$$(b-\alpha)\left(\frac{\nu}{m}\right)^m e^m \le \int_\alpha^b \frac{x^\nu}{\ln^m x}\,dx \le \max\left(\frac{\alpha^\nu}{\ln^m \alpha}, \frac{b^\nu}{\ln^m b}\right)(b-\alpha)$$

ΘΕΜΑ 70

Έστω **g: R→R** μια άρτια συνάρτηση (περιττή) που έχει αρχικές συναρτήσεις. Αληθεύει ότι κάθε αρχική **G: R→R** της **g** είναι περιττή ή άρτια;

Λύση

Έστω ότι η g είναι άρτια και G μια αρχική της.
Η G δεν μπορεί να είναι άρτια διότι τότε είναι
$G' = g$ περιττή (άτοπο)
Αν η G είναι περιττή, τότε
$G' = g$ άρτια
Όμως δεν είναι άρτια κάθε αρχική της g.
Αν G είναι μια περιττή αρχική της g, τότε η αρχική H της g με
$H(x) = G(x)+1$
δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

ΘΕΜΑ 71

Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις $\mathbf{f:R\to R^+}$ που έχουν αρχικές, τέτοιες ώστε για μια αρχική **F** της **f** στο **R** να είναι:

$$\mathbf{F(x)F(1-x)=F(x^2)}\ ,\quad \text{για κάθε } \mathbf{x\in R}$$

Λύση

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f που πληρεί τη σχέση
$F(x)F(1-x) = F(x^2)$ *(1)*
παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε:
$F'(x)F(1-x)-F(x)F'(1-x) = 2x\,F'(x^2)$, για κάθε $x\in R$
Άρα $f(x)F(1-x)-F(x)f(1-x) = 2x\,f(x^2)$ *(2)*

Για $x=0$ και $x=1$ η *(2)* γίνεται

$f(0)F(1)-F(0)f(1) = 0$

$f(1)F(0)-F(1)f(0) = 2f(1)$ *(3)*

Προσθέτουμε κατά μέλη τις *(3)* και βρίσκουμε

$2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ (άτοπο, διότι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$)

ΘΕΜΑ 72

Αν η $\mathbf{f:R\to R}$ έχει αρχικές συναρτήσεις στο **R** και $\mathbf{g:R\to R}$ είναι μια συνάρτηση με $\mathbf{g'}$ συνεχής στο **R**, τότε η συνάρτηση $\mathbf{h:R\to R}$, με $\mathbf{h(x)=f(x)g(x)}$ έχει αρχικές στο **R**.

Λύση

Έστω $F:R\to R$ μια αρχική της f. Είναι προφανές ότι η g είναι συνεχής στο R οπότε έχει αρχικές.

Έστω G μια αρχική της g στο R.

Είναι $(F\text{-}g)' = F'g+Fg' = fg+Fg'$

Επειδή οι F και g΄ είναι συνεχείς προκύπτει ότι Fg΄ είναι συνεχής στο R, οπότε έχει μια αρχική H στο R.

Έχουμε $f\cdot g = (F\cdot g\text{-}H)'$ οπότε η hg έχει αρικές συναρτήσεις στο R.

ΘΕΜΑ 73

(i) Να δείξετε ότι υπάρχει το $\mathbf{I=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx}$

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί $\mathbf{\alpha,b}$ τέτοιοι ώστε για κάθε $\mathbf{x\in R}$, $\mathbf{x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$ με $\mathbf{k\in z}$ να ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}+b\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$$

(iii) Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ στα διαστήματα που δεν περιέχουν σημεία $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ με $k\in z$.

(iv) Να υπολογιστεί το I.

Λύση

(i) Η $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ οπότε υπάρχει το I.

(ii) Έστω $D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in z\}$

Για κάθε $x\in R$, $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ και είναι

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\left(\frac{1}{1+\eta\mu x}+\frac{1}{1-\eta\mu x}\right)$$

Άρα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}+\frac{1}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}$ και $\alpha=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

(iii) Η f έχει αρχικές συναρτήσεις σε όλα τα υποδιαστήματα το D. Έστω J ένα τέτοιο υποδιάστημα. Οι αρχικές της h στο J είναι

$$\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+c$$

(iv) $I=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}\right]_0^{\pi/4}$, $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\subset D$

ΘΕΜΑ 74

Αν f συνεχής στο $[0,\pi]$ και αν $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = συν\alpha$.

Λύση

Έστω $g(x) = f(x) - συνx$, για κάθε $x \in (0,\pi)$

Είναι $\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} [f(x) - συνx]dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx - \int_0^{\pi} συνx\,dx =$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\,dx - \int_0^{\pi} (ημx)'\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx - \Big[ημx\Big]_0^{\pi} = 0$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$. Βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\alpha \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx = g(\alpha)\pi \quad , \quad \text{δηλαδή} \quad g(\alpha)\pi = 0$$

Άρα υπάρχει $\alpha \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha) = 0$ ή $f(\alpha) - συν\alpha = 0$ ή $f(\alpha) = συν\alpha$

ΘΕΜΑ 75

Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $$\int_0^{\pi/2} \frac{συνx}{\sqrt[3]{3 - συν^3 x}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{ημx}{\sqrt[3]{3 - ημ^3 x}}dx$$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2x+3}{\ln(x^2-3x+4)}\,dx=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\ln(x^2+x+2)}\,dx$

Λύση

(i) Θέτουμε $y=\frac{\pi}{2}-x$ και έχουμε

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt[3]{3-\sigma\upsilon\nu^3 x}}\,dx=\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt[3]{3-\eta\mu^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\,dx=$$

$$=\int_{\pi/2}^{0} \frac{-\eta\mu y}{\sqrt[3]{3-\eta\mu^3 y}}\,dy=\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{3-\eta\mu^3 x}}\,dx$$

(ii) Θέτουμε $y = 1-x$

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+3}{\ln(x^2-3x+4)}\,dx=\int_0^1 \frac{(1-x)^2+2}{\ln[(1-x)^2+(1-x)+2)}\,dx=$$

$$=-\int_1^0 \frac{y^2+2}{\ln(y^2+y+2)}\,dy=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\ln(x^2+x+2)}\,dx$$

ΘΕΜΑ 76

Να δείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\int_\alpha^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\int_{e^\alpha}^{e^b} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$, όπου $0\leq \alpha<b$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4-4x^3+6x^2-4x+2}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Λύση

(i) Θέτουμε $e^t = x \Rightarrow dx = e^t dt$ και έχουμε

$$\int_a^b \sqrt{1+\frac{1}{e^{2t}}}\, e^t\, dt = \int_a^b \sqrt{e^{2t}+1}\, dt = \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

(ii) Θέτουμε $y = 1-x$ και έχουμε

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4-4x^3+6x^2-4x+2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+(1-x)^4}} =$$

$$= \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1+y^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

ΘΕΜΑ 77

Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\int_{1/e}^{\varepsilon\varphi x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^{\sigma\varphi x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$$

Λύση

Έστω $I = \int_{1/e}^{\sigma\varphi x} \frac{dt}{t(1+t^2)}$

Θέτουμε $t = \frac{1}{z}$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_e^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} \frac{(-1)}{z^2}\, dz = \int_{\varepsilon\varphi x}^{e} \frac{z\,dz}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \int_{\varepsilon\varphi x}^{e} \frac{z\,dz}{z^2+1}$$

Έχουμε

$$\int_{1/e}^{\varepsilon\varphi x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^{\sigma\varphi x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{1/e}^{\varepsilon\varphi x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\varepsilon\varphi x}^{e} \frac{t\,dt}{1+t^2} =$$

$$=\int_{1/e}^{e}\frac{t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_{1/e}^{e}\frac{2t\,dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_{1/e}^{e}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(e^2+1)-\ln\left(\frac{1}{e^2}+1\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{\frac{e^2+1}{e^2}}=\frac{1}{2}\ln e^2=1$$

ΘΕΜΑ 78

Αποδείξτε ότι: $\mathbf{1<\dfrac{1}{e^2(e-1)}\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{x}{\ln x}dx<\frac{e}{2}}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, $x\in[e,e^2]$

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, $x\in[e,e^2]$

$f'(x)\geq 0$ οπότε η f είναι αύξουσα στο $[e,e^2]$

Άρα $e\leq f(x)\leq\dfrac{e^2}{2}$ οπότε

$$\int_e^{e^2}f(x)\,dx\leq\int_e^{e^2}\frac{e^2}{2}dx$$

$$\frac{1}{e^2(e-1)}\int_e^{e^2}\frac{x}{\ln x}dx<\frac{e^2}{2}\,\frac{1}{e^2(e-1)}\,(e^2-e)=\frac{e}{2}$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{e^2(e-1)}\int_e^{e^2}\frac{x}{\ln x}dx<\frac{e}{2}$$

Επίσης

$f(x) \geq e$ οπότε $\displaystyle\int_e^{e^2} f(x)\,dx \geq \int_e^{e^2} e\,dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^2(e-1)} \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}\,dx \geq \frac{1}{e^2(e-1)}\, e\,(e^2 - e) = 1$$

Άρα $\displaystyle 1 < \frac{1}{e^2(e-1)} \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}\,dx < \frac{e}{2}$

ΘΕΜΑ 79

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$, με $\displaystyle \mathbf{f(x) = \max_{t \leq x} t^3}$ για $\mathbf{x \leq 0}$ και

$\displaystyle \mathbf{f(x) = \min_{t > x} t^2}$ για $\mathbf{x > 0}$. Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathbf{f(x)\,dx}$.

Λύση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ , & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 \ , & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Μια αρχική συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση $F:R \to R$, με

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} \ , & \text{αν } x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{3} \ , & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(1) - f(-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ΘΕΜΑ 80

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, b \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει

$$\left(\int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^\nu x\,dx\right)\left(\int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^{\nu+1} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu+1}(\alpha - b)(\eta\mu\alpha - \eta\mu b) \quad (1)$$

Λύση

Έστω $I_k = \int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^k x\,dx$

$$I_0 = \int_\alpha^b dx = b - \alpha \quad ,$$

$$I_1 = \int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu x dx = \left[\eta\mu x\right]_\alpha^b = \eta\mu b - \eta\mu\alpha$$

Άρα $I_0 \cdot I_1 = (b-\alpha)(\eta\mu b - \eta\mu\alpha) = \frac{1}{1}(\alpha - b)(\eta\mu\alpha - \eta\mu b)$

Άρα η *(1)* ισχύει για n=0

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \text{ , } k \in N^* \{1\} \quad (2)$$

Άρα $I_2 = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}(b-\alpha) \Rightarrow I_1 I_2 = \frac{1}{2}(\alpha - b)(\eta\mu\alpha - \eta\mu b)$

Για $k = 2, 3, \ldots, \nu+1$ η *(2)* γράφεται

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 \qquad (3)$$

. . . .

$$I_\nu = \frac{\nu - 1}{\nu} I_{\nu - 2}$$

$$I_{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu + 1} I_{\nu - 1}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις *(3)* κατά μέλη και έχουμε:

$$I_\nu I_{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} I_0 I_1 = \frac{1}{\nu+1} (\alpha - b)(\eta\mu\alpha - \eta\mu b)$$

ΘΕΜΑ 81

Να δείξετε ότι: $$\int_0^1 (1 - x^p)^\nu \, dx = \frac{p^\nu \nu!}{\prod\limits_{k=1}^{\nu} (kp + 1)} , \quad \nu, p \in N^*$$

Λύση

Έστω $I = \int_0^1 (1 - x^p)^\nu dx = \int_0^1 x' (1 - x^p)^\nu dx =$

$$= \Big[x (1 - x^p)^\nu \Big]_0^1 - \int_0^1 x \nu (-p) x^{p-1} (1 - x^p)^{\nu - 1} dx =$$

$$= \nu p \int_0^1 x^p (1 - x^p)^{\nu - 1} dx = \nu p \int_0^1 \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} \right)' (1 - x^p)^{\nu - 1} dx =$$

$$=\left[\nu p \frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x^p)^{\nu-1}\right]_0^1 - \nu p \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}(-p)\, x^{p-1}(\nu-1)(1-x^p)^{\nu-2}\, dx$$

$$=\frac{\nu(\nu-1)p^2}{p+1}\int_0^1 x^{2p}(1-x^p)^{\nu-2}\, dx$$

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο και στο τέλος βρίσκουμε

$$I=\frac{\nu!\, p^{\nu}}{(p+1)(2p+1)(3p+1)\ldots(\nu p+1)}$$

ΘΕΜΑ 82

Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα να δείξετε ότι:

$$\mathbf{\frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5}\, dx < 1}$$

Λύση

Βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, υπάρχουν m, M τέτοιοι, ώστε

$$m(b-\alpha) < \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx < M(b-\alpha)$$

Για να βρούμε τους m, M πρέπει να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x-9}{2x+5}$ στο [5,8]

$$f'(x)=\frac{2(2x+5)-2(2x-9)}{(2x+5)^2}=\frac{18}{(2x+5)^2}\geq 0 \ , \text{ για κάθε } x\in R\{-\frac{5}{2}\}$$

Άρα η f είναι συνεχής και αύξουσα στο [5,8], οπότε έχουμε

$$m=f(5)=\frac{1}{15} \quad \text{και} \quad M=f(8)=\frac{1}{3}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\frac{1}{15}(8-5) < \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5}\,dx \le \frac{1}{3}(8-5) \iff \frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5}\,dx < 1$$

ΘΕΜΑ 83

Έστω **f** μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]\supset[a,b]$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $g:[\alpha-a,\beta-b]\to\mathbb{R}$, με

$$g(x)=\int_\alpha^b f(x+y)\,dy$$

Λύση

Θέτουμε $x+y=t \Rightarrow g(x)=\int_{x+\alpha}^{x+b} f(t)\,dt \Rightarrow g'(x)=f(x+b)-f(x+\alpha)$

ΘΕΜΑ 84

Να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} x f(x)\,dx\ ,\ \alpha>0$

Λύση

Θέτουμε $t=x^2 \Rightarrow dt=2x\,dx$

$$\int_0^\alpha x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} t f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} x f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 85

Αν η **f** είναι ολοκληρώσιμη στο **[0,1]**, να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{4\nu-1} f(x^{2\nu})\,dx = \frac{1}{2\nu}\int_0^1 x f(x)\,dx\ ,\ \nu \in N^*$$

Λύση

Θέτουμε $x^{2\nu} = t \ \Rightarrow\ 2\nu x^{2\nu-1}\,dx = dt$

$$\int_0^1 x^{2\nu} x^{2\nu-1} f(x^{2\nu})\,dx = \frac{1}{2\nu}\int_0^1 t f(t)\,dt = \frac{1}{2\nu}\int_0^1 x f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 86

Έστω $I_\nu(x) = \int_0^x t^{2\nu}\sqrt{\alpha^2 - t^2}\,dt$ όπου $0 \le x \le \alpha$, $\nu = 0,1,2,..$

(i) Να βρεθεί ένας ανδρομικός τύπος για τον υπολογισμό της $I_\nu(x)$

(ii) Να υπολογιστούν: $I_0(\alpha)$ και $I_1(\alpha)$

Λύση

(i) $I_\nu(x) = \int_0^x t^{2\nu}\sqrt{\alpha^2 - t^2}\,dt = -\frac{1}{3}\int_0^x t^{2\nu-1}\left[\left(\alpha^2 - t^2\right)^{3/2}\right]'\,dt =$

$$= -\frac{1}{3}\left[t^{2\nu-1}(\alpha^2 - t^2)^{3/2}\right]_0^x + \frac{1}{3}\int_0^x (2\nu-1)\,t^{2\nu-2}(\alpha^2 - t^2)^{3/2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}x^{2\nu-1}(\alpha^2 - x^2)^{3/2} + \frac{2\nu-1}{3}\int_0^1 (\alpha^2 - t^2)\sqrt{\alpha^2 - t^2}\,t^{2\nu-2}\,dt =$$

$$\frac{1}{3}x^{2\nu-1}(\alpha^2-x^2)^{3/2}+\frac{2\nu-1}{3}\left[\alpha^2\int_0^x t^{2\nu-2}\sqrt{\alpha^2-t^2}\,dt-\int_0^x t^{2\nu}\sqrt{\alpha^2-t^2}\,dt\right]=$$

$$\frac{1}{3}x^{2\nu-1}(\alpha^2-x^2)^{3/2}+\frac{2\nu-1}{3}\alpha^2 I_{\nu-1}(x)-\frac{2\nu-1}{3}I_\nu(x)$$

Άρα $\left(\frac{2\nu-1}{3}+1\right)I_\nu(x)=-\frac{1}{3}x^{2\nu-1}(\alpha^2-x^2)^{3/2}+\frac{2\nu-1}{3}\alpha^2 I_{\nu-1}(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\nu+2)\,I_\nu(x)=-x^{2\nu-1}(\alpha^2-x^2)^{3/2}+(2\nu-1)\,\alpha^2 I_{\nu-1}(x)$

(ii) $I_0(\alpha)=\int_0^\alpha\sqrt{\alpha^2-t^2}\,dt$ Θέτουμε $t=\alpha\eta\mu u \Rightarrow dt=\alpha\sigma\upsilon\nu u\,du \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_0(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 u\,du=\alpha^2\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 u\,du=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\sigma\upsilon\nu 2u)\,du=\frac{\pi}{4}\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu 2u\,du=$$

$$=\frac{\pi}{4}\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}\Big[\eta\mu 2u\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi\alpha^2}{4}$$

$$I_1(\alpha)=\frac{\alpha^2 I_0(\alpha)}{4}=\frac{\pi\alpha^4}{16}$$

ΘΕΜΑ 87

Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma\upsilon\nu(x f(x^2))\,dx=2\int_0^{\alpha}\sigma\upsilon\nu(x f(x^2))\,dx$

Λύση

Η συνάρτηση συν είναι άρτια οπότε:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma\upsilon\nu(x\, f(x^2))\, dx = 2\int_{0}^{\alpha} \sigma\upsilon\nu(x\, f(x^2))\, dx$$

ΘΕΜΑ 88

Να δείξετε ότι: $\mathbf{I = \int_0^\pi \frac{\eta\mu 2kx}{\eta\mu x} dx = 0}$ για κάθε $\mathbf{k \in Z}$

Λύση

Θέτουμε $x = \pi - t$ και έχουμε

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{\eta\mu(2k(\pi - t))}{\eta\mu(\pi - t)} dt = \int_0^\pi \frac{\eta\mu(2k\pi - 2kt)}{\eta\mu t} dt =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\eta\mu 2k\pi\ \sigma\upsilon\nu 2kt - \sigma\upsilon\nu 2k\pi\ \eta\mu 2kt}{\eta\mu t} dt =$$

$$= -\int_0^\pi \frac{\eta\mu 2kt\, \sigma\upsilon\nu 2k\pi}{\eta\mu t} dt = -\int_0^\pi \frac{(-1)^{2k} \eta\mu 2kt}{\eta\mu t} dt =$$

$$= -\int_0^\pi \frac{\eta\mu 2kt}{\eta\mu t} dt = -I$$

Άρα $2I = 0 \Rightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 89

Έστω $\mathbf{f_0 : [0, 1] \to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και $\mathbf{f_{\nu+1}}$ η αρχική της $\mathbf{f_\nu}$ στο $\mathbf{[0,1]}$, με $\mathbf{f_{\nu+1}(0) = 0}$, $\nu \in \mathrm{N}$. Αν $\mathbf{f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!}}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0 \in [0, 1]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f_0(x_0) = x_0}$.

Λύση

Έχουμε $f_{\nu+1}(x)=\int_0^x f_\nu(t)\,dt\ ,\ x\in[0,1]$

Άρα $f_{1982}(1)=\dfrac{1}{1983!}\Leftrightarrow\int_0^1 f_{1981}(t)\,dt=\int_0^1\dfrac{t^{1982}}{1982!}dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left(f_{1981}(t)-\dfrac{t^{1982}}{1982!}\right)dt=0$

Άρα βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $x_{1981}\in(0,1)$ τέτοιο,

ώστε $f_{1981}(x_{1981})-\dfrac{x_{1981}^{1982}}{1982!}=0$

Άρα $\int_0^{x_{1981}}\left(f_{1980}(t)-\dfrac{t^{1981}}{1981!}\right)dt=0$

οπότε υπάρχει $x_{1980}\in(0,x_{1981})$ τέτοιο, ώστε

$f_{1980}(x_{1980})-\dfrac{x_{1980}^{1981}}{1981!}=0$ κ.λ.π.

υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f_0(x_0)=\dfrac{x_0}{1!}$

ΘΕΜΑ 90

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις **$f:[1,4]\to\mathbb{R}$**, αν

$$\int_1^2 f^2(x^2)\,dx-2\int_1^2 f(x^2)\,dx=\int_1^4 f(x)\,dx-\frac{19}{3}$$

Λύση

Θέτουμε $x=t^2$ οπότε $dx=2tdt$ και

$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^2 f(t^2)\,2t\,dt=2\int_1^2 x\,f(^2x)\,dx$

Είναι $\int_1^2 f^2(x^2)\,dx - 2\int_1^2 f(x^2)\,dx - 2\int_1^2 f(x^2)\,x\,dx + \frac{19}{3} = 0$

Είναι $\int_1^2 (x+1)^2\,dx = \int_1^2 (x^2+2x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_1^2 =$

$= \frac{8}{3}+4+2-\frac{1}{3}-1-1 = \frac{7}{3}+4 = \frac{19}{3}$

Άρα $\int_1^2 \left(f^2(x^2) - 2(x+1)f(x^2) + (x+1)^2\right)dx = 0$

$\int_1^2 [f(x^2)-(x+1)]^2 = 0$

Άρα $f(x^2) = x+1$ οπότε $f(x) = \sqrt{x}+1$

ΘΕΜΑ 91

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\mathbf{f:[-\alpha,\alpha]\to I}$ $\mathbf{\alpha>0}$, $\mathbf{I\subset P}$ και $\mathbf{g:I\to R}$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι άρτια και συνεχής η $\mathbf{g}$ συνεχής και

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx = \lambda \;,\; \lambda \in R$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(x))}{e^x+1}\,dx$

Λύση

Θέτουμε x=-t οπότε dx = -dt και έχουμε

$$I = -\int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{g(f(-t))}{e^{-t}+1}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(t))}{\frac{1}{e^t}+1}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^t g(f(t))\,dt}{e^t+1} =$$

ΘΕΜΑ 92

Έστω $\mathbf{f:[1,4]\rightarrow R}$ μια συνάρτηση συνεχής και μονότονη. Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_0^1 |f(x)-\alpha| \geq |f(x)-f(\tfrac{1}{2})|\, dx$

Λύση

Είναι $\displaystyle\int_0^1 |f(x)-\alpha|\,dx = \int_0^{1/2} |f(x)-\alpha|\,dx + \int_{1/2}^1 |f(x)-\alpha|\,dx =$

$$\int_0^{1/2} |f(x)-\alpha|\,dx + \int_0^{1/2} |f(t+\frac{1}{2})-\alpha|\,dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(|f(x)-\alpha| + |f(x+\frac{1}{2})-\alpha|\right) dx \geq$$

$$\geq \int_0^{1/2} |f(x+\frac{1}{2})-f(x)| = \int_0^{1/2} |f(x+\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})-f(x)|\,dx =$$

$$\overset{f \text{ μονότονη } 1/2}{=} \int_0^{1/2} \left(|f(x+\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2})| + |f(\frac{1}{2})-f(x)|\right) dx =$$

$$\int_0^{1/2} |f(x+\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2})|\,dx + \int_0^{1/2} |f(\frac{1}{2})-f(x)|\,dx =$$

$$\int_{1/2}^1 |f(t)-f(\frac{1}{2})|\,dt + \int_0^{1/2} |f(x)-f(\frac{1}{2})|\,dx =$$

$$= \int_0^1 | f(x) - f(\tfrac{1}{2}) | dx$$

ΘΕΜΑ 93

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε $\mathbf{f(\alpha+\beta-x)=f(x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta x\, f(x)\, dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = (\alpha+\beta)\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\, dx$$

Λύση

Θέτουμε $x = \alpha+\beta-t$ οπότε

$$\int_\alpha^\beta x\, f(x)\, dx = \int_\beta^\alpha (\alpha+\beta-t)\, f(\alpha+\beta-t)\,(-dt) =$$

$$\int_\alpha^\beta (\alpha+\beta)\, f(t)\, dt - \int_\alpha^\beta t\, f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta)\, f(x)\, dx - \int_\alpha^\beta x\, f(x)\, dx$$

Άρα $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, f(x)\, dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

Έχουμε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)\, dx \quad (1)$

Θέτουμε $x = \alpha+\beta-u$, οπότε

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)\, dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\alpha f(\alpha+\beta-u)\,(-du) = \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(u)\, du$$

Η *(1)* γράφεται $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\, dx \;\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = (\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 94

Έστω $\mathbf{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και **F** μια αρχική της **f**. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x, y\in[\alpha,\beta]}$ ισχύει η σχέση:

$$|\mathbf{F(x)-F(y)}| \le \mathbf{k}\,|\mathbf{x-y}| \;,\quad \text{όπου}\quad \mathbf{k>0}$$

Λύση

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ είναι μια αρχική της f.

$$F(x)-F(y)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{y} f(t)-dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+\int_{y}^{\alpha} f(t)\,dt=\int_{y}^{x} f(t)\,dt$$

Αν $y<x$, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $x_0\in[y\,,x]$ τέτοιο, ώστε $\int_{y}^{x} f(t)\,dt=(x-y)\,f(x_0)$

Η f είναι συνεχής στο $[y,x]\subset[\alpha,\beta]$, οπότε είναι φραγμένη και υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε $|f(x_0|\le M$ για κάθε $x_0\in(\alpha\,,\beta)$.

Άρα $|F(x)-F(y)|\le M\,|x-y|$ για κάθε $x\,,y\in(\alpha\,,\beta)$ με $x>y$

ΘΕΜΑ 95

Έστω **f** μια συνεχής συνάρτηση με $\mathbf{f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta}$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$, α, β δοσμένοι. Να υπολογίστε: $\int_0^{2\alpha} f(t)\,dt$

Λύση

Θέτουμε $x = \alpha - t$ οπότε $dx = -dt$

$$\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(\alpha - t)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha - t)\,dt \quad (1)$$

Θέτουμε $x = \alpha + t$ οπότε $dx = dt$

$$\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha + t)\,dt \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις *(1)* και *(2)* και έχουμε:

$$2\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha + t)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha - t)\,dt =$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (f(\alpha + t) + f(\alpha - t))\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2\beta\,dt = 2\beta\,\big[x\big]_{-\alpha}^{\alpha} = 2\beta\,2\alpha = 4\alpha\beta$$

Άρα $\int_0^{2\alpha} f(t)\,dt = 2\alpha\beta$

ΘΕΜΑ 96

Έστω $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = x^{\nu} \text{ για κάθε } x \in [-1,1], \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Αν $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \dfrac{\nu^2}{2(2\nu - 1)}$, να βρεθεί η f.

Λύση

Έστω F μια αρχική της f.

Τότε $F(x)-F(-x) = x^{\nu}$ και $F(-x)-F(x) = (-x)^{\nu}$

Άρα $-x^{\nu} = (-x)^{\nu}$, οπότε ν περιττός

$f(x)+f(-x) = \nu x^{\nu-1}$ και

$$g(x) = f(x) - \frac{\nu x^{\nu-1}}{2} = -\left(f(x) - \frac{\nu(-x)^{\nu-1}}{2}\right) = -g(-x)$$

Άρα $g(x) = -g(-x)$ οπότε η g είναι περιττή και

$$f(x) = g(x) + \frac{\nu x^{\nu-1}}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \frac{\nu^2}{2(2\nu-1)}$$

οπότε $\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx - 0$ και $g(x) = 0$

Συνεπώς $f(x) = \dfrac{\nu x^{\nu-1}}{2}$

ΘΕΜΑ 97

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνεχής συνάρτηση που πληρεί τις συνθήκες:

1) $\mathbf{f(\alpha)>\alpha}$ 2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)\,dx < \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$

Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0 \in [\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0) = x_0}$

Λύση

Αν $f(x)>x$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta x\,dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ (άτοπο)

Αν υπάρχει $c \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(c) < c$
τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$
έχει τις ιδιότητες $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha > 0$ και $g(c) = f(c) - c < 0$
και επειδή η g είναι συνεχής, βάσει του θ. Bolzano υπάρχει
$x_0 \in (\alpha, c) \subset (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

ΘΕΜΑ 98

Έστω $\mathbf{f: [0,1] \to R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη, με την ιδιότητα ότι η $\mathbf{f''}$ δε μηδενίζεται στο $\mathbf{[0,1]}$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx \neq f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Λύση

Η f'' δε μηδενίζεται στο $[0,1]$, οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ ή $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε η f' είναι γν. αύξουσα.

Υποθέτουμε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Τότε $\int_0^1 [f(x) - f(\frac{1}{2})]\,dx = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{1/2} [f(\frac{1}{2}) - f(x)\,dx = \int_{1/2}^1 [f(x) - f(\frac{1}{2})]\,dx$ *(1)*

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ. στα διαστήματα

$\left[x, \frac{1}{2}\right]$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2}, x\right]$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left[x, \frac{1}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(\xi) < \left(\frac{1}{2} - x\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

και $\xi_2 \in \left[\frac{1}{2}, x\right]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(\xi_2) > \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Από την *(1)* έχουμε

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) dx > \int_{1/2}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) dx$$

δηλαδή $\frac{1}{8} f'\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{8} f'\left(\frac{1}{2}\right)$ (άτοπο)

Όμοια όταν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

ΘΕΜΑ 99

Έστω οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$ συνεχείς. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\int_\alpha^\xi \mathbf{f(x)\,dx} = \int_\alpha^\xi \mathbf{g(x)\,dx}$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mu \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(\mu) = g(\mu)}$.

Λύση

Αν F και G είναι αρχικές των f και g αντίστοιχα, έχουμε

$$F(\xi)\text{-}F(\alpha) = G(\xi)\text{-}G(\alpha) \iff F(\xi)\text{-}G(\xi) = F(\alpha)\text{-}G(\alpha)$$

Έστω $\varphi(x) = F(x)\text{-}G(x)$

Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\xi]$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $\mu \in (\alpha,\xi)$ τέτοιο, ώστε

$$\varphi'(\mu) = 0 \iff F'(\mu)\text{-}G'(\mu) = 0 \iff f(\mu) = g(\mu)$$

ΘΕΜΑ 100

Έστω $f:[0,1]\to R_+$ μια συνάρτηση φθίνουσα. Αποδείξτε ότι για κάθε $\beta \in (0\,,1)$ ισχύει: $\int_0^{\beta} f(x)\,dx \geq \beta \int_0^1 f(x)\,dx$

Λύση

$0<\beta \leq x \leq 1$ οπότε $f(x)\leq f(\beta)$

και $\int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{\beta}^{1} f(\beta)\,dx = (1-\beta)\,f(\beta)$

$\int_0^{\beta} f(x)\,dx = \beta\, f(\xi)$ όπου $\xi\in(0,\beta)$

Άρα $\int_0^{\beta} f(x)\,dx \geq \beta\, f(\beta) \geq \frac{\beta}{1-\beta}\int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\beta)\int_0^{\beta} f(x)\,dx \geq \beta\int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\beta} f(x)\,dx \geq \beta\left(\int_0^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)\,dx\right) = \beta\int_0^{1} f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 101

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με f' συνεχής. Αποδείξτε ότι αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ τότε

$$\max_{\alpha\leq x\leq \beta} |f'(x)| \geq \frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

Λύση

Έστω $x\in(\alpha,\beta)$. Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x)$ και $\xi_2\in(x,\beta)$ τέτοιοι, ώστε

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)\,f'(\xi_1) \quad \text{και} \quad f(\beta)-f(x)=(\beta-x)\,f'(\xi_2)$$

Άρα $\quad f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)\,f'(\xi_1)=(x-\alpha)\,f'(\xi_1)\quad$ και

$$f(x)=f(\beta)+(x-\beta)\,f'(\xi_2)=(x-\beta)\,f'(\xi_2)$$

Συνεπώς $|f(x)|\le M\,(x-\alpha)$ και $|f(x)|\le M\,(\beta-x)$ όπου $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f'(x)|$

$$\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta|f(x)|\,dx\le\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\left[\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}M(x-\alpha)\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta M(\beta-x)\,dx\right]=$$

$$=\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}M+\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}M\right]=M$$

ΘΕΜΑ 102

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση αύξουσα. Αποδείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\,f(x)\,dx\ge\int_\alpha^\beta(\beta-x)\,f(x)\,dx \quad (1)$$

Λύση

Η *(1)* γράφεται $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha-\beta+x)\,f(x)\,dx\ge 0 \iff$

$$\int_\alpha^\beta(2x-\alpha-\beta)\,f(x)\,dx\ge 0 \iff \int_\alpha^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(x)\,dx\ge 0 \iff$$

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(x)\,dx\ge\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)f(x)\,dx \quad \overset{x-\frac{\beta-\alpha}{2}=t}{\iff}$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)\, f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+x\right)dx \geq \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right) f(x)\, dx \quad (2)$$

Η f είναι αύξουσα, οπότε όταν $x \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ είναι

$f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+x\right) \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Άρα έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)\, f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+x\right)dx \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)\, dx =$$

$$= f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)dx \geq \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right) f(x)\, dx$$

Άρα η *(2)* αληθεύει

ΘΕΜΑ 103

Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ είναι συνεχής με $\mathbf{f(x)\geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in [\alpha,\beta]}$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{\xi\in (\alpha,\beta)}$ έτσι, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{e^x}\, dx = \frac{1}{e^{\alpha}} \int_{\alpha}^{\xi} f(x)\, dx$$

Λύση

Θεωρούμε $h(x) = \frac{1}{e^{\alpha}} \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$

Επειδή $e^{-\alpha} \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{-\alpha} f(x) \geq e^{-x} f(x) \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{e^x}\, dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\beta) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{e^x} \geq h(\alpha)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:

$$h(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{e^x}\,dx$$

Επομένως

$$\frac{1}{e^{\alpha}} \int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{e^x}\,dx$$

ΘΕΜΑ 104

Έστω **f: R→R** μια συνάρτηση συνεχής, περιττή και περιοδική, με περίοδο **T**. Αποδείξτε ότι:

$$\int_{m}^{n} f(x)\,dx = 0 \quad \text{για κάθε} \quad m,n \in \mathbb{R}\ , \quad m+n=T$$

Λύση

$f(-x) = -f(x)$ και $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(-x)+f(x+T) = 0$ *(1)*

Για $x \to x-T$ η *(1)* γίνεται:

$f(-x+T)+f(x) = 0$

οπότε $\displaystyle\int_{m}^{n} (f(-x+T)+f(x))\,dx = 0 \iff \int_{m}^{n} f(x)\,dx = -\int_{m}^{n} f(-x+T)\,dx$

Θέτουμε $-x+T = t$ και έχουμε

$$\int_{m}^{n} f(-x+T)\,dx = -\int_{T-m}^{T-n} f(t)\,dt$$

Άρα $\displaystyle\int_{m}^{n} f(x)\,dx = \int_{T-m}^{T-n} f(x)\,dx = \int_{n}^{m} f(x)\,dx \iff$

$$\int_{m}^{n} f(x)\,dx + \int_{m}^{n} f(x)\,dx = 0 \iff 2\int_{m}^{n} f(x)\,dx = 0$$

ΘΕΜΑ 105

Έστω **f** μια συνάρτηση συνεχής στο **R** και $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,dt$.

Αποδείξτε ότι αν η **g** είναι φθίνουσα, τότε **f=0** για κάθε **x∈R**.

Λύση

Έστω $G(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$, $G'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)\,dt$ $\quad G'(0) = 0$

Αν $x>0$ είναι $g(x) \le g(0)$, οπότε $2g(x)\le 2g(0)$ και $G'(x)=2g(x)\le 2g(0)=0$. Άρα η G είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$. Όμοια αποδεικνύεται ότι η G είναι αύξουσα στο $(-\infty,0]$, $G(0)=0$. Άρα $G(x) \ge 0$, για κάθε $x\in R$ και

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\neq 0$ π.χ. $f(x_0) > 0$. Όμως η f είναισυνεχής στο x_0, οπότε υπάρχει μια περιοχή V του x_0 τέτοια, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $x\in V$.

Έστω $x_1\in V$ με $x_1 > x_0$ $\quad \int_0^{x_0} f(t)\,dt = 0$, $\int_0^{x_1} f(t)\,dt = 0$

Άρα $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = 0$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x_0,x_1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = (x_1 - x_0)\,f(\xi) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad f(\xi) = 0 \quad (\text{άτοπο})$$

ΘΕΜΑ 106

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις **f:[0,1]→R** τέτοιες, ώστε:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx \quad (1)$$

Λύση

$$\int_0^1 f(x)\,dx \overset{x=t^2}{=} \int_0^1 2t\,f(t^2)\,dt = \int_0^1 2f(x^2)\,x\,dx$$

Η *(1)* γράφεται διαδοχικά:

$$-\int_0^1 2f(x^2)\,x\,dx + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = 0 \iff$$

$$\int_0^1 (f^2(x^2) + x^2 - 2xf(x^2))\,dx = 0 \iff$$

$$\int_0^1 (f(x^2) - x)^2\,dx = 0 \iff f(x^2) - x = 0 \iff$$

$$f(x^2) = x \iff f(x) = \sqrt{x}$$

ΘΕΜΑ 107

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και υπάρχει $\alpha \in (0\,,\,1]$ τέτοιο, ώστε $\int_0^\alpha f(x)\,dx = 0$. Αποδείξτε ότι:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{1-\alpha}{2} \sup_{\alpha<x<1} |f'(x)|$$

Λύση

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \overset{x=\alpha t}{=} \int_0^1 f(\alpha t)\,dt = 0$$

Αν $M = \sup\limits_{0<x<1} |f'(x)|$ έχουμε $f(x) - f(\alpha x) \le (1-\alpha)\,xM$

οπότε $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| - \left|\int_0^1 (f(x) - f(\alpha x))\,dx\right| \le (1-\alpha)\,M\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,M$

Ισότητα υπάρχει για $f:[0,1]\to R$, με $f(x) = \pm M\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 108

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, με τις ιδιότητες: **f** - 2 φορές παραγωγίσιμη, $\mathbf{f(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x\in(\alpha,\beta)}$ και $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)=0}$.

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c_1,c_2\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιοι, ώστε $\mathbf{c_1<c_2}$ και

$$\mathbf{f'(x_1) - f'(x_2) \ge \frac{4M}{\beta-\alpha}} \quad \text{όπου} \quad \mathbf{M = \max_{\alpha\le x\le\beta} f(x)}$$

(ii) Αν υπάρχει $\mathbf{I = \int_\alpha^\beta \frac{|f''(x)|}{f(x)}\,dx}$ τότε $\mathbf{I \ge \frac{4}{\beta-\alpha}}$

Λύση

(i) f - συνεχής, οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=M$. Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $c_1\in(\alpha,x_0)$ και $c_2\in(x_0,\beta)$ τέτοιοι, ώστε

$$f(x_0) - f(\alpha) = f'(c_1)\,(x_0-\alpha)$$
$$f(\beta) - f(x_0) = f'(c_2)\,(\beta - x_0)$$

Άρα $f'(c_1) - f'(c_2) = M\left(\frac{1}{x_0-\alpha} + \frac{1}{\beta - x_0}\right) = \frac{M(\beta-\alpha)}{(x_0-\alpha)(\beta-x_0)} =$

$$\geq \frac{M(\beta-\alpha)}{\left(\frac{x_0-\alpha+\beta-x_0}{2}\right)^2} = \frac{4M}{\beta-\alpha}$$

(ii) $\int_\alpha^\beta \frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{|f''(x)|}{M}dx = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta |f''(x)|\,dx \geq$

$$\geq \frac{1}{M}\int_{c_1}^{c_2} |f''(x)|\,dx \geq \frac{1}{M}\left|\int_{c_1}^{c_2} f''(x)\,dx\right| = \frac{1}{M}|f'(c_2) - f'(c_1)| \geq \frac{4}{\beta-\alpha}$$

ΘΕΜΑ 109

Αν $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, με f' συνεχής και $f(0)=f(1)=0$, τότε $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx$

Λύση

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x' f(x)\,dx = \Big[x f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x f'(x)\,dx =$$

$$= f(1) - \int_0^1 x f'(x)\,dx = -\int_0^1 x f'(x)\,dx$$

$$2\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-2x) f'(x)\,dx$$

Από την ισότητα Schwarz έχουμε

$$4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-2x) f'(x)\,dx\right)^2 \leq$$

$$\le \int_0^1 (1-2x)^2\,dx \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$$

$$=\left[x-2x^2+\frac{4x^3}{3}\right]_0^1 \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx=\frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$$

Άρα $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$

Ισότητα έχουμε όταν $f(x) = cx(x-1)$

ΘΕΜΑ 110

Έστω $f:R\to[-\alpha,\alpha]$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με f' συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ Αποδείξτε ότι:

$$|f(0)| \le \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} |f'(x)|\,dx$$

Λύση

$$|f(0)|=|f(x)+f(0)-f(x)|\le|f(x)|+|f(0)-f(x)|$$

$$|f(0)|=|f(-x)+f(0)-f(-x)|\le|f(x)|+|f(0)-f(-x)|$$

Άρα $2|f(0)|\le|f(x)|+|f(-x)|+|f(x)-f(0)|+|f(-x)-f(0)|$

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(0)|\,dx\le\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)|\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(-x)|\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)-f(0)|\,dx+$$

$$+\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(-x)-f(0)|\,dx \qquad (1)$$

Όμως $\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(-x)|\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)|\,dx$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(-x)-f(0)|\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)-f(0)|\,dx$$

οπότε η *(1)* γράφεται

$$4\alpha\,|f(0)| \le 2\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|\,dx + 2\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)-f(0)|\,dx \quad (2)$$

Επίσης

$$|f(x)-f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \le \int_0^x |f'(t)|\,dt \le \int_0^\alpha |f'(t)|\,dt \quad \text{για} \quad x\in[0,\alpha]$$

Για $x\in[-\alpha,0]$ $\quad |f(x)-f(0)| \le \int_{-\alpha}^{0} |f'(t)|\,dt$

Άρα $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)-f(0)|\,dx = \int_{-\alpha}^{0} |f(x)-f(0)|\,dx + \int_0^\alpha |f(x)-f(0)|\,dx \le$

$$\le \int_{-\alpha}^{0}\left(\int_{-\alpha}^{0} |f'(x)|\,dx\right)dx + \int_0^\alpha\left(\int_0^\alpha |f'(x)|\,dx\right)dx = \alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} |f'(x)|\,dx \quad (3)$$

Από τις *(2)* και *(3)* βρίσκουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 111

Αν **f, g:[α,β]→R** είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις, με **g(x) ≥ 0** για κάθε **x∈[α,β]** . Τότε υπάρχει **μ∈(m,M)** τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

m και **M** είναι αντίστοιχα το ελάχιστο και το μέγιστο της **f**.

Λύση

Η f είναι συνεχής, οπότε υπάρχουν m και M τέτοιοι, ώστε m≤f(x)≤M-για κάθε x∈[m.M].

Άρα $\quad m\,f(x) \le f(x)\,g(x) \le M\,g(x)$

οπότε $m\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$ *(1)*

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = 0$ Τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx = 0$

οπότε μ είναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός του $[\alpha,\beta]$

(ii) $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx > 0$ Τότε η *(1)* γράφεται

$$m \le \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx} \le M \quad \text{και} \quad \mu = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx}$$

Άμεση συνέπεια αυτής της άσκησης είναι ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο,

ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 112

Έστω $\mathbf{f:[0,1]\to R}$ παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'}$ συνεχής στο $\mathbf{[0,1]}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in[0,1]}$ τέτοιο, ώστε: $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)}$

Λύση

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \Big[(x-1)\,f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (x-1)\,f'(x)\,dx =$$

$$= f(0) - \int_0^1 (x-1)\,f'(x)\,dx = f(0) + \int_0^1 (1-x)\,f'(x)\,dx$$

Όμως για $x\in[0.1]$ είναι f' συνεχής και $1-x\ge 0$, οπότε υπάρχει $c\in(0,1)$

τέτοιο, ώστε $\int_0^1 (1-x)\,f'(x)\,dx = f'(c)\int_0^1 (1-x)\,dx =$

$$= f'(c)\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = f'(c)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f'(c)$$

Άρα υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$$

ΘΕΜΑ 113

Έστω $\mathbf{f:[0,\infty)\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και για κάθε $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ με $\boldsymbol{0\le\alpha<\beta}$

και κάθε $\mathbf{c>0}$ ισχύει η σχέση: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)\,dx} \le \int_{\alpha+c}^{\beta+c} \mathbf{f(x)\,dx}$

Αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι αύξουσα στο $\mathbf{[0,\infty)}$.

Λύση

Θέτουμε $\alpha = x_1 \ge 0$, $\beta = x_1+x$, $x>0$ και $c = x_2-x_1$ με $x_2 > x_1$

Είναι $\displaystyle\int_{x_1}^{x_1+x} f(u)\,du \le \int_{x_2}^{x_2+x} f(u)\,du$ *(1)*

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $c_1(x)\in(x_1,x_1+x)$ και $c_2(x)\in(x_2,x_2+x)$ τέτοιοι ώστε

$$\int_{x_1}^{x_1+x} f(u)\,du = x\,f(c_1(x)) \quad \text{και} \quad \int_{x_2}^{x_2+x} f(u)\,du = x\,f(c_2(x))$$

Άρα η *(1)* γράφεται $x\,f(c_1(x)) \le x\,f(c_2(x))$ όπου $x>0$

Άρα $f(c_1(x)) \le f(c_2(x))$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(c_1(x)) \le \lim\limits_{x\to 0} f(c_2(x)) \Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

Άρα η f είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$.

ΘΕΜΑ 114

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{x-\alpha}\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du \le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du \le \frac{1}{\beta-x}\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du$$

Λύση

Έστω $g(x)=\frac{1}{x-\alpha}\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du \quad , \quad x\in(\alpha,\beta]$

$h(x)=\frac{1}{\beta-x}\int_{x}^{\beta} f(u)\,du \quad , \quad x\in[\alpha,\beta)$

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)'\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du+\frac{1}{x-\alpha}\left(\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du\right)'=$$

$$=\frac{1}{x-\alpha}f(x)-\frac{1}{(x-\alpha)^2}\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du=\frac{(x-\alpha)\,f(x)-\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du}{(x-\alpha)^2}$$

Όμοια $h'(x)=\dfrac{-f(x)\,(\beta-x)+\int_{x}^{\beta} f(u)\,du}{(\beta-x)^2}$

βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(\alpha,x)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{x} f(u)\,du=(x-\alpha)\,f(c)$$

Άρα $g'(x)\ge 0 \quad , \quad x\in(\alpha,\beta]$. Όμοια $h'(x)\ge 0 \quad , \quad x\in[\alpha,\beta)$, οπότε οι g και h είναι αύξουσες.

Άρα αν $\alpha<x<\beta$ είναι $h(\alpha)\le h(x) \;,\; g(x)\le g(\beta) \;,\;$ με $h(\alpha)=g(\beta)$

ΘΕΜΑ 115

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to[c,d]}$, με $\mathbf{\alpha,\beta,c,d>0,\ \alpha>\beta,\ c<d}$. Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{dx}{f(x)} \le \frac{\beta-\alpha}{c}$

Λύση

Είναι $\dfrac{(f(x)-c)\,(f(x)-d)}{f(x)} \le 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$

$\Leftrightarrow \quad f^2(x)-(c+d)\,f(x)+cd\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-(c+d)+\dfrac{cd}{f(x)}\le 0$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \left[f(x)-(c+d)+\frac{cd}{f(x)}\right]dx\le 0 \quad \Leftrightarrow$

$\displaystyle cd\int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}\,dx\le (c+d)\,(\beta-\alpha)-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\,f(\xi)$

Άρα $\displaystyle cd\int_\alpha^\beta \frac{dx}{f(x)}\le (c+d)\,(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)\,f(\xi)\le(c+d)\,(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)\,c=$

$=c\beta-\alpha c+d\beta-\alpha d-\beta c+\alpha c=d\,(\beta-\alpha)$

Άρα $\displaystyle cd\int_\alpha^\beta \frac{dx}{f(x)}\le d\,(\beta-\alpha) \quad\Leftrightarrow\quad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{f(x)}\le\frac{\beta-\alpha}{c}$

ΘΕΜΑ 116

Έστω $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ με $\mathbf{g(x)\neq 0}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(c)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = g(c)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Λύση

Έστω $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $G(x)=\int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$

Οι F και G πληρούν τις προϋποθέσεις του Θ. Cauchy, οπότε υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{G(\beta)-G(\alpha)}=\frac{F'(c)}{G'(c)} \Leftrightarrow \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt}{\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,dt-\int_{\alpha}^{\alpha} g(t)dt}=\frac{f(c)}{g(c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad g(c)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(c)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 117

Έστω $f, F:[0,\alpha]\to R$ με f συνεχής και αύξουσα στο $[0,\alpha]$ και $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, όταν $x\in[0,\alpha]$, $\alpha>0$. Να αποδείξτε ότι:

$$\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt \ge \frac{\alpha^2}{2} f(0)$$

Λύση

Έστω $F,G:[0,\alpha]\to R$, $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, $G(x)=x$

Βάσει της προηγούμενης άσκησης υπάρχει $c\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε

$$G(c)\int_0^{\alpha} F(x)\,dx = F(c)\int_0^{\alpha} G(x)\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$c\int_0^{\alpha} F(x)\,dx = F(c)\int_0^{\alpha} x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F(c)}{c} = \frac{\int_0^{\alpha} F(x)\,dx}{\int_0^{\alpha} x\,(dx)}$$

Όμως $\dfrac{F(c)}{c} = \dfrac{\int_0^{c} f(t)\,dt}{c} \geq \dfrac{c\,f(0)}{c} = f(0)$

Άρα $\dfrac{\int_0^{\alpha} F(x)\,dx}{\int_0^{\alpha} x\,dx} \geq f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\int_0^{\alpha} F(x)\,dx}{\frac{\alpha^2}{2}} \geq f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\alpha} F(x)\,dx \geq f(0)\,\dfrac{\alpha^2}{2}$

ΘΕΜΑ 118

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $\mathbf{f(\beta)=0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{f'(c)\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt + c \leq \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

Λύση

Έστω $F,G:[\alpha,\beta]\to R$, $F(x) = f'(x)\int_0^{x} f(t)\,dt + x$, $G(x)=x,\ x\in[\alpha,\beta]$

Βάσει της άσκησης 116 υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx}{\int_{\alpha}^{\beta} 1\,dx} = \frac{F(c)}{1} = f'(c)\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt + c \quad (1)$$

Όμως $\dfrac{\int_\alpha^\beta F(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta dx} = \dfrac{\int_\alpha^\beta \left(f'(x)\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)dx + \int_\alpha^\beta x\,dx}{\beta-\alpha} =$

$$= \frac{\left[f(x)\int_\alpha^x f(t)\,dt\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}}{\beta-\alpha} =$$

$$= \frac{-\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}}{\beta-\alpha} \le \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$f'(c)\int_\alpha^c f(t)\,dt + c \le \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ΘΕΜΑ 119

Έστω **$f,g:[\alpha,\beta]\to R$** δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι υπάρχει **$\xi\in(\alpha,\beta)$** τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{f(\xi)\,g(\xi)\int_\xi^\beta f(t)\,dt\int_\xi^\beta g(t)\,dt =}$$

$$\mathbf{= \int_\alpha^\xi f(t)\,g(t)\,dt\left[f(\xi)\int_\xi^\beta f(t)\,dt + g(\xi)\int_\xi^\beta f(t)dt\right]}$$

Λύση

Έστω $h(x) = \int_\alpha^x f(t)\,g(t)\,dt\int_x^\beta f(t)\,dt\int_x^\beta g(t)\,dt$

h - συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0$

$$h'(x) = f(x)\, g(x) \int_x^{\beta} f(t)\, dt \int_x^{\beta} g(t)\, dt +$$

$$+ \int_{\alpha}^{x} f(t)\, g(t)\, dt \left[-f(x) \int_x^{\beta} g(t)\, dt - g(x) \int_x^{\beta} f(t)\, dt \right]$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)\, g(\xi) \int_{\xi}^{\beta} f(t)\, dt \int_{\xi}^{\beta} g(t)\, dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\xi} f(t)\, g(t)\, dt \left[f(\xi) \int_{\xi}^{\beta} f(t)\, dt + g(\xi) \int_{\xi}^{\beta} f(t) dt \right]$$

ΘΕΜΑ 120

Έστω $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και $\mathbf{f{:}[\alpha,\beta] \to R}$ με $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)\, dx = 0}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει

$\mathbf{c \in (\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle\int_{\alpha}^{c} \mathbf{f(x)\, dx = f(c)}$

Λύση

Έστω $h(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$, $x \in [\alpha,\beta]$

$h(\alpha) = 0$

$h(\beta) = e^{-\beta} \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = 0$

Άρα βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(c) = 0$

$$h'(x) = -e^{-x} \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt + e^{-e} f(x)$$

$$h'(c)=0 \iff e^{-c} f(c)=e^{-c}\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt \iff f(c)=\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 121

Έστω $\alpha>0$ και $f:[\alpha,\beta]\to R$ μια συνάρτηση συνεχής με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt=c\,f(c)$$

Λύση

Έστω $g(x)=\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad , \quad x\in[\alpha,\beta]$

$g(\alpha)=g(\beta)=0$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $g'(c)=0$

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+\frac{f(x)}{x}$$

$$g'(c)=0 \iff \frac{1}{c^2}\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt=\frac{f(c)}{c} \iff \int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt=c\,f(c)$$

ΘΕΜΑ 122

Αν $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και φθίνουσα και δε μηδενίζεται για $x\in(\alpha,\beta)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\left(\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right)^2 = 6\int_\alpha^c f(t)\,dt\int_c^\beta f(t)\,dt$$

Λύση

Έστω $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt\int_x^\beta f(t)\,dt\left(\int_x^\beta f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt\right)$

$g(\alpha) = g(\beta) = 0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c) = 0$

$$g'(x) = \left[f(x)\int_x^\beta f(t)\,dt - f(x)\int_\alpha^x f(t)\,dt\right]\left[\int_x^\beta f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt\right] +$$

$$+\int_\alpha^x f(t)\,dt\int_x^\beta f(t)\,dt\,(-f(x) - f(x)) =$$

$$= f(x)\left[\int_x^\beta f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt\right]^2 - 2f(x)\int_\alpha^x f(t)\,dt\int_x^\beta f(t)\,dt$$

$$g'(c) = 0 \quad \left[\int_c^\beta f(t)\,dt - \int_\alpha^c f(t)\,dt\right]^2 = 2\int_\alpha^c f(t)\,dt\int_c^\beta f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\int_\alpha^c f(t)dt\right)^2 + \left(\int_c^\beta f(t)\,dt\right)^2 = 4\int_\alpha^c f(t)dt\int_c^\beta f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\int_\alpha^c f(t)\,dt + \int_c^\beta f(t)\,dt\right)^2 - 2\int_\alpha^c f(t)\,dt\int_c^\beta f(t)\,dt = 4\int_\alpha^c f(t)\,dt\int_c^\beta f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right)^2 = 6\int_\alpha^c f(t)\,dt\int_c^\beta f(t)\,dt$$

ΘΕΜΑ 123

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση φθίνουσα αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει

$$\frac{1}{\beta-x}\int_x^\beta f(t)\,dt \le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \le \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Λύση

Για την πρώτη ανισότητα θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x)=\frac{1}{\beta-x}\int_x^\beta f(t)\,dt-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \quad x\in(\alpha,\beta)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(\beta-x)^2}\int_x^\beta f(t)\,dt+\frac{1}{\beta-x}[-f(x)]=$$

$$=\frac{1}{(\beta-x)^2}\left[\int_x^\beta f(t)\,dt-(\beta-x)\,f(x)\right]$$

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c_x\in(x,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_x^\beta f(t)\,dt=(\beta-x)\,f(c_x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{\beta-x}[f(c_x)-f(x)]\le 0$$

Συνεπώς η F είναι φθίνουσα, οπότε

$$F(x)\le F(\alpha)=0$$

Άρα $\frac{1}{\beta-x}\int_x^\beta f(t)\,dt\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

Όμοια για τη 2η ανισότητα.

ΘΕΜΑ 124

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με $f(\alpha)>\alpha^2$ και $3\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<\beta^3-\alpha^3$, $\alpha<\beta$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi^2$.

Λύση

Έστω $g(x) = f(x)-x^2$, $g(\alpha)>0$ *(1)*

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta x^2\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}=$$

$$=\frac{3\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-(\beta^3-\alpha^3)}{3}<0$$

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=(\beta-\alpha)\,g(c)<0$$

Άρα $g(c)<0$ *(2)*

Από τις *(1)* και *(2)* προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$ (Bolzano)

Άρα $f(\xi) = \xi^2$

ΘΕΜΑ 125

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\mathbf{c,c'\in(\alpha,\beta)}$ τέτοια, ώστε:

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx=(\beta-c)\,f(c) \quad \text{και} \quad \int_c^\beta f(x)\,dx=(c'-\alpha)\,f(c')$$

Λύση

Έστω $h(x)=[F(x)-F(\alpha)]\,(\beta-x)$ όπου F μια αρχική της f

$h(\alpha)=h(\beta)=0$

οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$h'(c)=0$

$h'(x) = [F(x) - F(\alpha)]' (\beta - x) - [F(x) - F(\alpha)] =$
$= F'(x)(\beta - x) - F(x) + F(\alpha) = f(x)(\beta - x) - F(x) + F(\alpha)$

$h'(c)=0 \Leftrightarrow f(c)(\beta\text{-}c) = F(c)\text{-}F(\alpha) \Leftrightarrow f(c)\,\beta - c) \int_\alpha^c f(x)\,dx$

Για τη 2η ισότητα θεωρούμε τη συνάρτηση:
$g(x) = [F(x) - F(x)]\,(x - \alpha)$ κ.λ.π.

ΘΕΜΑ 126

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και $\mathbf{P}$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές με $\mathbf{\min(P(\alpha),P(\beta)) < \beta\text{-}\alpha < \max(P(\alpha),P(\beta))}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\mathbf{c_1,c_2 \in (\alpha,\beta)}$ τέτοια, ώστε: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)\,dx = P(c_1)\,f(c_2)}$

Λύση

Έστω $g(x) = P(x)+\alpha\text{-}\beta$
$g(\alpha) = P(\alpha)\text{-}(\beta\text{-}\alpha)<0$
$g(\beta) = P(\beta)+\alpha\text{-}\beta>0$

Άρα βάσει του θ. Bolzano υπάρχει $c_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε
$g(c_1)=0 \quad P(c_1) = \beta\text{-}\alpha$

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\beta - \alpha)\,f(c_2) = P(c_1)\,f(c_2)$$

ΘΕΜΑ 127

Έστω $\mathbf{f_1,f_2:R\to R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις. Αν η γραφική παρά-

οπότε η C_{f_2} είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$, τότε:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} x\,(f_1 \circ f_2)(x)\,dx=\frac{\beta_1+\alpha_1}{2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_1 \circ f_2)(x)\,dx$$

Λύση

Μια ευθεία $x=x_0$ είναι άξονας συμμετρίας για την c_f όταν $f(x)=f(2x_0-x)$

Άρα έχουμε $x_0=\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ και $f_2(x)=f_2(\alpha_1+\beta_1-x)$

Είναι $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1} x\,(f_1 \circ f_2)(x)\,dx=\int_{\alpha_1}^{\beta} xf_1(f_2(x))\,dx=\int_{\alpha_1}^{\beta_1} xf_1(f_2(\alpha_1+\beta_1-x))\,dx$

Θέτουμε $\alpha_1+\beta_1-x=t$

Οπότε $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1} xf_1(f_2(\alpha_1+\beta_1-x))\,dx=-\int_{\beta_1}^{\alpha_1}(\alpha_1+\beta_1-t)\,f_1(f_2(t)\,dt)=$

$$=-(\alpha_1+\beta_1)\int_{\beta_1}^{\alpha_1}(f_1 \circ f_2)(t)\,dt+\int_{\beta_1}^{\alpha_1} t\,f_1\,(f_2(t))\,dt=$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_1 \circ f_2)(x)\,dx-\int_{\alpha_1}^{\beta_1} x\,(f_1 \circ f_2)(x)\,dx$$

Άρα $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1} x\,(f_1 \circ f_2)(x)\,dx=\frac{\beta_1+\alpha_1}{2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_1 \circ f_2)(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 128

Έστω $\mathbf{f,g:[0,1]\to R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες, ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}(m+M)$$

όπου $m = \inf\limits_{0 \le x \le 1} f(x)$ και $M = \sup\limits_{0 \le x \le 1} g(x)$

Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \le \frac{m^2+M^2}{2}$

Λύση

Έχουμε $(f(x)-m)\,(g(x)-M) \le 0$

οπότε $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-m)\,(g(x)-M) \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x)\,g(x) - M\,(f(x) - m\,g(x) + m\,M]\,dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)g(x)\,dx - M\int_0^1 f(x)\,dx - m\int_0^1 g(x)\,dx + m\,M\int_0^1 dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_0^1 f(x)\,dx + m\int_0^1 g(x)\,dx - m\,M =$$

$$= M\,\frac{1}{2}(m+M) + m\,\frac{1}{2}(m+M) - m\,M = \frac{(m+M)^2}{2} - m\,M =$$

$$= \frac{m^2+M^2+2\,m\,M-2\,m\,M}{2} = \frac{m^2+M^2}{2}$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \le \frac{m^2+M^2}{2}$

ΘΕΜΑ 129

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και περιοδική με περίοδο $\mathbf{T}$.

Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$ για κάθε $\alpha \in R$

Λύση

Έστω $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x+T} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

F - παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x+T) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$

Άρα $F(x) = k$ (σταθερά) οπότε $\displaystyle\int_{0}^{x+T} f(t)\,dt + \int_{x}^{0} f(t)\,dt = k$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_{x}^{x+T} f(t)\,dt = k$ για κάθε $x \in R$

Για $x=0$ είναι $\displaystyle\int_{0}^{T} f(x)\,dx = k$

οπότε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 130

Έστω $\mathbf{f:R \to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και περιοδική με περίοδο $\mathbf{T}$.
Αποδείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha+\nu T}^{\beta+\nu T} f(x)\,dx \quad \text{για κάθε} \quad \alpha,\beta \in R,\ \nu \in z$$

Λύση

Θέτουμε $x+\nu T=t$ και έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha+\nu T}^{\beta+\nu T} f(t-\nu T)\,dt=\int_{\alpha+\nu T}^{\beta+\nu T} f(t)\,dt$$

διότι f(t-νt) = f(t) αφού η f είναι περιοδική.

ΘΕΜΑ 131

Έστω $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ μια συνάρτηση που πληρεί τις συνθήκες:

1) g συνεχής στο $[0,\alpha)$, για κάθε $\alpha>0$

2) g περιοδική, με περίοδο T

3) $\displaystyle\int_0^T g(t)\,dt=0$

Αποδείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής και φραγμένη, ισχύει: $\displaystyle\int_0^T f(t)\,g(\nu t)\,dt=0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

Λύση

Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ τέτοιο, ώστε $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\ge 0$

Είναι $\displaystyle 0\le\left|\int_0^T f(t)\,g(\nu t)\,dt\right|\overset{\nu t=x}{=}\left|\frac{1}{\nu}\int_0^{\nu T} f\left(\frac{x}{\nu}\right)g(x)\,dx\right|\le$

$$\le\frac{1}{\nu}\int_0^{\nu T}\left|f\left(\frac{x}{\nu}\right)g(x)\right|\,dx\le\frac{M}{\nu}\int_0^{\nu T}|g(x)|\,dx=$$

$$= \frac{M}{\nu}\int_0^{\nu T} g(x)\,dx = \frac{M}{\nu}\left(\int_0^{T} g(x)\,dx + \int_T^{2T} g(x)\,dx + \ldots + \int_{(\nu-1)T}^{\nu T} g(x)\,dx\right)$$

Όμως $\int_0^{T} g(x)\,dx = \int_{\nu T}^{(\nu+1)T} g(t)\,dt$ για κάθε $\nu \in z$

Άρα $0 \le \left|\int_0^{T} f(t)\,g(\nu t)\,dt\right| \le 0$

οπότε $\int_0^{T} f(t)\,g(\nu t)\,dt = 0$

ΘΕΜΑ 132

Έστω **f:R→R** μια συνάρτηση συνεχής, περιττή και περιοδική με περίοδο **T**. Αποδείξτε ότι: $\int_\mu^\nu f(x)\,dx = 0$ για κάθε $\mu,\nu \in R$ με $\mu+\nu=T$

Λύση

$f(-x) = -f(x)$ και $f(x+T) = f(x)$

Άρα $f(-x)+f(x+T) = 0$

Θέτουμε $x = x-T$ και είναι

$f(-x+T)+f(x) = 0$

οπότε $\int_\mu^\nu f(x)\,dx = -\int_\mu^\nu f(-x+T)\,dx \overset{-x+T=t}{=} \int_{T-\mu}^{T-\nu} f(t)\,dt =$

$$= \int_\nu^\mu f(x)\,dx = -\int_\mu^\nu f(x)\,dx$$

Άρα $2\int_\mu^\nu f(x)\,dx = 0$

ΘΕΜΑ 133

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση **3** φορές παραγωγίσιμη, με $\mathbf{f', f'', f'''}$ συνεχείς και $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)=0}$, $\mathbf{f'(\beta)=0}$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f'''(x)\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}\,[\,f'(\alpha)\,]^2$$

Λύση

$$\int_\alpha^\beta f'''(x)\,f(x)\,dx=\Big[f''(x)\,f(x)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f''(x)\,f'(x)\,dx=$$

$$=f''(\beta)\,f(\beta)-f''(\alpha)\,f(\alpha)-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\Big[f'(x)^2\Big]'\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[(f'(x))^2\Big]_\alpha^\beta=-\frac{1}{2}\,[\,f'(\beta)]^2+\frac{1}{2}\,[\,f'(\alpha)\,]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\,[\,f'(\alpha)\,]^2$$

ΘΕΜΑ 134

Έστω **P** ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Αν $\mathbf{k\in R}$ είναι η μοναδική πραγματική ρίζα του πολυώνυμου **P** στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και $\mathbf{P'(k)<0}$, αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$ είναι:

$$\int_\alpha^k P(t)\,dt\ge\int_\alpha^x P(t)\,dt$$

Λύση

Έστω $F(x)=\int_{\alpha}^{x} P(t)\,dt$

$F'(x) = P(x)$ και $F'(k) = P(k) = 0$
$F''(x) = P'(x)$ οπότε $F''(k) = P'(k) < 0$
Επειδή $F'(k) = 0$ και $F''(k) < 0$ η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=k$.
Συνεπώς $F(x) \leq F(k)$ για κάθε $x\in R$
δηλαδή $\int_{\alpha}^{x} P(t)\,dt \leq \int_{\alpha}^{k} P(t)\,dt$

ΘΕΜΑ 135

Έστω $\mathbf{f:[\alpha-\beta,\alpha+\beta]\rightarrow R}$, $\mathbf{\beta>0}$, μια συνάρτηση συνεχής.

(i) Αν $\mathbf{f(\alpha-x)=f(\alpha+x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in [0,\beta]}$, αποδείξτε ότι:

$$\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx = 2\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx = 2\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(ii) Αν $\mathbf{f(\alpha-x)=-f(\alpha+x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in [\alpha,\beta]}$, τότε:

$$\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx = 0$$

Λύση

(i) $\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx =$

$$=\int_{-\beta}^{0} f(\alpha+t)\,dt+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=\int_{-\beta}^{0} f(\alpha-t)\,dt+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(t)\,dt=$$

$$=-\int_{\alpha+\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=$$

$$=2\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{0}^{\beta} f(\alpha+t)\,dt=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{0}^{\beta} f(\alpha-t)\,dt=$$

$$=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx-\int_{\alpha}^{\alpha-\beta} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=2\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(ii) $$\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{0}^{\beta} f(\alpha+t)\,dt=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx-\int_{0}^{\beta} f(\alpha-t)\,dt=$$

$$=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha-\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx-\int_{\alpha-\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=0$$

ΘΕΜΑ 136

Έστω οι συναρτήσεις $\boldsymbol{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ και $\boldsymbol{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. Αν η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής, περιττή και περιοδική με περίοδο $\mathbf{T}$, με $\boldsymbol{f'}$ συνεχής και $\boldsymbol{\varphi}$ είναι συνεχής και άρτια, αποδείξτε ότι:

$$\mathbf{I}=\int_{T-\beta}^{T+\beta} x\,f'(x)\,\varphi(f(x))\,dx=T\int_{f(-\beta)}^{f(\beta)} \varphi(x)\,dx \text{ για κάθε } \beta\in\mathbb{R}$$

Λύση

Έχουμε $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $f(-x) = -f(x)$,

$f'(-x) = f'(x)$ και $f(T+x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$

Θέτουμε $y = T-x$ και έχουμε

$$I = \int_{T-\beta}^{T+\beta} x\, f'(x)\, \varphi(f(x))\, dx = -\int_{\beta}^{-\beta} (T-y)\, f'(T-y)\, \varphi(f(T-y))\, dy =$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} (T-y)\, f'(y)\, \varphi(-f(y))\, dy = \int_{-\beta}^{\beta} (T-y)\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy =$$

$$T\int_{-\beta}^{\beta} f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy - \int_{-\beta}^{\beta} y\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy$$

Έχουμε $= \int_{-\beta}^{0} y\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy \overset{y=-z}{=} -\int_{\beta}^{0} -z\, f'(-z)\, \varphi(f(-z))\, dz =$

$$\int_{0}^{\beta} z\, f'(z)\, \varphi(f(z))\, dz$$

Άρα $\int_{0}^{\beta} y\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy + \int_{-\beta}^{0} y\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_{-\beta}^{\beta} y\, f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy = 0$

Συνεπώς $I = T\int_{-\beta}^{\beta} f'(y)\, \varphi(f(y))\, dy \overset{f(y)=t}{=}$

$$T\int_{f(-\beta)}^{f(\beta)} \varphi(t)\, dt = T\int_{f(-\beta)}^{f(\beta)} \varphi(x)\, dx$$

ΘΕΜΑ 137

Έστω οι συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής και $F:[\alpha,\beta]\to R$ με

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(y)\,dy$$. Αποδείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $k>0$ τέτοιο, ώστε $|F(x_1)-F(x_2)|\le k\,|x_1-x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$.

(ii) Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Λύση

(i) Έστω $M=\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|$

$$|F(x_1)-F(x_2)| = \left|\int_{\alpha}^{x_1} f(y)\,dy - \int_{\alpha}^{x_2} f(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int_{\alpha}^{x_1} f(y)\,dy + \int_{x_2}^{\alpha} f(y)\,dy\right| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f(y)\,dy\right| =$$

$$=(x_1-x_2)\,|f(\xi)| \quad , \quad \xi\in(x_2, x_1)$$

Άρα $|F(x_1)-f(x_2)| = (x_1-x_2)\,|f(\xi)| \le |x_1-x_2|\,M$

Άρα υπάρχει $k=M>0$ τέτοιο, ώστε

$$|F(x_1)-F(x_2)| \le k\,|x_1-x_2|$$

(ii) Έστω $x_0\in[\alpha,\beta]$. Από την (i) έχουμε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

$$|F(x)-F(x_0)\le k\,|x-x_0|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0} k\,|x-x_0|=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$

Άρα η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ 138

Έστω μια συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ συνεχής με $f(0)=\frac{1}{2}$. Αν υπάρχει $k>0$ τέτοιο, ώστε $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \geq k\,|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in[0,1]$ τότε:

(i) $\int_{0}^{x} f(t)\,dt \geq kx$ για κάθε $x\in[0,1]$

(ii) $\int_{0}^{x} f^2(t)\,dt \geq \frac{x(2kx-1)}{4}$ για κάθε $x\in[0,1]$

Λύση

Έστω F μια αρχική της f, $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Αν $F(\alpha)=F(\beta)$ είναι $0=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$

Άρα $0=\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt\right| = k\,|\alpha-\beta|$, $k>0$

οπότε $\alpha=\beta$. Συνεπώς η F είναι "1-1", οπότε είναι γν. μονότονη.
Έστω ότι η F είναι γν. αύξουσα. Τότε

$F'(x)=f(x)\geq 0$

και επειδή $f(0)=\frac{1}{2}$ έχουμε $f(x)>0$.

Άρα $\int_{0}^{x} f(t)\,dt>0$ για κάθε $x\in[0,1]$

(i) $\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \left|\int_{0}^{x} f(t)\,dt\right| \geq k\,|x-0| = kx$ για κάθε $x\in[0,1]$

(ii) Είναι $\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

οπότε $f^2(x) \geq f(x)-\frac{1}{4}$

και $\int_0^x f^2(t)\,dt \geq \int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_0^x dt \geq k\int_0^x t\,dt - \frac{1}{4}x =$

$= \frac{kx^2}{2} - \frac{x}{4} = \frac{(2kx-1)\,x}{4}$

ΘΕΜΑ 139

Έστω $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$ δυο συναρτήσεις με **f**-συνεχής και $\mathbf{g(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$. Αν $\mathbf{f(\alpha)g(\beta)<0}$ αποδείξτε ότι:

(i) υπάρχουν $\mathbf{c,d\in[\alpha,\beta]}$ τέτοιοι, ώστε $\mathbf{f(c)=0}$ και $\mathbf{g(d)=0}$

(ii) $\mathbf{\int_\alpha^d f(t)\,dt=0}$

(iii) υπάρχουν $\mathbf{\mu}$, $\mathbf{\nu}$ τέτοιοι, ώστε $\mathbf{\int_\alpha^\mu f(t)\,dt=-\int_\mu^\nu f(t)\,dt}$

Λύση

(i) Υποθέτουμε ότι $f(\alpha)>0$ και $g(\beta)<0$.

Αν $f(x)\geq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \geq 0$ δηλαδή $g(\beta)\geq 0$ (άτοπο).

Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)<0$.

Άρα $f(\alpha)f(\xi)<0$, οπότε βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει $c\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο,

ώστε $f(c)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(\alpha)>0$, υπάρχει $\eta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\eta]$.

Άρα $g(\eta)=\int_{\alpha}^{\eta} f(t)\,dt>0$

Όμως η g ειναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, άρα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επειδή $g(\eta)g(\beta)<0$ υπάρχει $d\in[\eta,\beta]$ τέτοιο, ώστε $g(d)=0$

(ii) $g(d)=\int_{\alpha}^{d} f(t)\,dt=0$

(iii) Αν $\nu=d$ και $\mu\in[\alpha,d]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{d} f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{\mu} f(t)\,dt+\int_{\mu}^{\nu} f(t)\,dt=0$$

οπότε $\int_{\alpha}^{\mu} f(t)\,dt=-\int_{\mu}^{\nu} f(t)\,dt$

ΘΕΜΑ 140

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$\int_0^x |\eta\mu f(t)|\,dt=\int_0^x |\sigma\upsilon\nu f(t)|\,dt\ ,\ x\geq 0$$

Λύση

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση και έχουμε

$|\eta\mu f(x)|=|\sigma\upsilon\nu f(x)|\ ,\ x\geq 0$

Άρα $|\varepsilon\varphi f(x)|=1$ οπότε $\varepsilon\varphi\,(f(x)=\pm 1$

Αν $\varepsilon\varphi\,((f(x))=1$ είναι $f(x)=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z$

Αν $\varepsilon\varphi\,(f(x))=-1$ είναι $f(x)=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z$

Άρα $f(x)=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in Z$

ΘΕΜΑ 141

Έστω $\mathbf{f:[0,\alpha]\to R}$ μια συνάρτηση με $\mathbf{f'}$ συνεχής και $\mathbf{f(0)=0}$. Αποδείξτε ότι:

(i) $$\int_0^\alpha f(x)\,dx=\int_0^\alpha (\alpha-x)\,f'(x)\,dx$$

(ii) $$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right|\le\frac{\alpha^2}{2}\max_{0\le x\le\alpha}|f'(x)|$$

(iii) $$\int_0^\alpha |f'(x)\,f(x)|\,dx\le\frac{\alpha}{2}\int_0^\alpha |f'(x)|^2\,dx$$

Λύση

(i) $$\int_0^\alpha f(x)\,dx=\int_0^\alpha x'\,f(x)\,dx=\Big[x\,f(x)\Big]_0^\alpha-\int_0^\alpha x\,f'(x)\,dx=$$

$$=\alpha\,f(\alpha)-\int_0^\alpha x\,f'(x)\,dx=\alpha\,f(\alpha)-\alpha\,f(0)-\int_0^\alpha x\,f'(x)\,dx=$$

$$=\alpha\int_0^\alpha f'(x)\,dx-\int_0^\alpha x\,f'(x)\,dx=\int_0^\alpha (\alpha\,f'(x)-x\,f'(x))\,dx=$$

$$=\int_0^\alpha (\alpha-x)\,f'(x)\,dx$$

(ii) $$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right|\le\left|\int_0^\alpha (\alpha-x)\,f'(x)\,dx\right|\le\int_0^\alpha |\alpha-x|\,|f'(x)|\,dx=$$

$$=\int_0^\alpha (\alpha-x)\,|f'(x)|\,dx\le\max_{0\le x\le\alpha}|f'(x)|\int_0^\alpha (\alpha-x)\,dx=$$

$$=\left[\alpha x-\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha\max_{0\le x\le\alpha}|f'(x)|=\left(\alpha^2-\frac{\alpha^2}{2}\right)\max_{0\le x\le\alpha}|f'(x)|=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\max_{0\le x\le \alpha}|f'(x)|$$

(iii) Η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$,

οπότε $g'(x)=|f'(x)|$. Συνεπώς

$$\int_0^\alpha |f(x)\,f'(x)|\,dx=\int_0^\alpha |f'(x)|\left|\int_0^x f'(t)\,dt\right|dx\le$$

$$\le\int_0^\alpha |f'(x)|\left(\int_0^x |f'(t)\,dt|\right)dx\le\int_0^\alpha g'(x)\,g(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\alpha (g^2(x))'\,dx=\frac{1}{2}\left[g^2(x)\right]_0^\alpha=\frac{1}{2}\left[g^2(\alpha)-g^2(0)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}g^2(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\int_0^\alpha |f'(x)|\,dx\right)^2\le\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^\alpha |f'(x)|^2\,dx$$

ΘΕΜΑ 142

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)\int_\alpha^x g(t)\,dt=g(x)\int_x^\beta f(t)\,dt}$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbf{x_0\in(\alpha,\beta)}$.

Λύση

Έστω $\psi(x)=\int_\alpha^x g(t)\,dt\,g(x)\int_x^\beta f(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$

Οι f και g είναι συνεχείς, οπότε έχουν αρχικές.
Έστω $F'=f$ και $G'=g$

Έχουμε $\psi(x) = \Big[G(t)\Big]_{\alpha}^{x} \cdot \Big[F(t)\Big]_{x}^{\beta} = [G(x) - G(\alpha)]\,[F(\beta) - F(x)]$

$\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\psi'(x_0) = 0$

$\Psi'(x) = G'(x)\,[F(\beta)-F(x)] + \{G(x)-G(\alpha)\}[-F'(x)] =$

$= g(x)[F(\beta)-F(x)] - f(x)[G(x)-G(\alpha)] =$

$$= g(x)\int_{x}^{\beta} f(t)\,dt - f(x)\int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)\int_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt = f(x_0)\int_{\alpha}^{x_0} g(t)\,dt$$

ΘΕΜΑ 143

Έστω **$f:[\alpha,\beta]\to R$** μια συνάρτηση συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει **$\xi \in (\alpha,\beta)$** τέτοιο, ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt - \int_{\xi}^{\beta} f(t)\,dt = (\alpha + \beta - 2\xi)\,f(\xi)$$

Λύση

Έστω $g(x) = (x - \beta)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + (\alpha - x)\int_{x}^{\beta} f(t)\,dt$

$g(\alpha) = g(\beta)$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$

$$g'(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + (x - \beta)\,f(x) + \left[-\int_{x}^{\beta} f(t)\,dt - (\alpha - x)\,f(x)\right] =$$

$$= \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + (x - \beta)\,f(x) - \int_{x}^{\beta} f(x)\,dt - (\alpha - x)\,f(x) =$$

$$= \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt - \int_{x}^{\beta} f(t)\,dt + (x - \beta - \alpha + x)\,f(x)$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt - \int_{\xi}^{\beta} f(t)\,dt = (\alpha + \beta - 2\xi)\, f(\xi)$$

ΘΕΜΑ 144

Έστω $\alpha < \beta$ και f μια συνάρτηση θετική και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)}\,dx ,$$

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta - x)}{f(\beta - x) + f(x-\alpha)}\,dx$$

Λύση

$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)\,dx}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)}$ Θέτουμε $y = \alpha + \beta - x$,

οπότε $dy = -dx$ και

$$I_1 = -\int_{\beta}^{\alpha} \frac{f(\beta - y)}{f(\beta - y) + f(y-\alpha)}\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta - y)}{f(\beta - y) + f(y - \alpha)} = I_2$$

Άρα $I_1 = I_2$

Όμως $I_1 + I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha) + f(\beta - x)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha$

Άρα $2I_1 = \beta - \alpha$, οπότε $I_1 = I_2 = \frac{\beta - \alpha}{2}$

ΘΕΜΑ 145

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,b]\to R}$ μια συνεχής συνάρτηση, με την ιδιότητα ότι $\mathbf{f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\neq 0}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{\xi\in[\alpha,b]}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt=\frac{f(\xi)\,(\xi-\alpha)(\xi-b)}{\alpha+b-2\xi} \qquad (1)$$

Λύση

Έστω $\varphi:[\alpha,b]\to R$, με $\varphi(x)=(x-\alpha)(x-b)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο [α,b] και έχουμε

$$\varphi'(x)=(x-b+x-\alpha)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+(x-\alpha)(x-b)f(x)$$

$$\varphi'(x)=(2x-\alpha-b)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+(x-\alpha)(x-b)f(x)$$

Όμως $\varphi(\alpha)=\varphi(b)=0$. άρα η φ πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$. δηλαδή υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε

$$2\xi-\alpha-b)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt+(\xi-\alpha)(\xi-b)f(\xi)=0 \iff$$

$$\iff \int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt=\frac{f(\xi)\,(\xi-\alpha)(\xi-b)}{\alpha+b-2\xi}, \text{ αν } \frac{\alpha+b}{2}\neq\xi$$

Όμως $\frac{\alpha+b}{2}\neq\xi \iff f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\neq 0$ οπότε η *(1)* αληθεύει.

ΘΕΜΑ 146

Αν η f είναι μια συνάρτηση άρτια και ολοκληρώσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$, τότε ισχύει η σχέση:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\,dx=\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx\ , \quad \text{για κάθε } k\in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\,dx}{e^{kx}+1}=\int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\,dx+\int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\,dx=$$

$$\int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\,dx+\int_{0}^{\alpha} \frac{f(-x)}{e^{-kx}+1}\,dx=\int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\,dx+\int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{-kx}+1}\,dx=$$

$$\int_{0}^{\alpha} f(x)\left[\frac{1}{e^{kx}+1}+\frac{1}{e^{-kx}+1}\right]dx=\int_{0}^{\alpha} f(x)\left[\frac{1}{e^{kx}+1}+\frac{1}{\frac{1}{e^{kx}}+1}\right]dx=$$

$$=\int_{0}^{\alpha} f(x)\left(\frac{1}{e^{kx}+1}+\frac{e^{kx}}{1+e^{kx}}\right)dx=\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 147

Έστω $\alpha\in \mathbb{R}_+^*-\{1\}$ και f μια άρτια συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-b,b]$. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)\,dx}{\alpha^{kx}+1}=\int_{0}^{b} f(x)\,dx\ , \quad \text{για κάθε } k\in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)\,dx}{\alpha^{kx}+1} = \int_{-b}^{0} \frac{f(x)}{\alpha^{kx}+1}dx + \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{kx}+1}dx =$$

$$= \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{kx}+1}dx + \int_{0}^{b} \frac{f(-x)\,dx}{\alpha^{-kx}+1}dx = \int_{0}^{b} f(x)\left[\frac{1}{\alpha^{kx}+1} + \frac{1}{\alpha^{-kx}+1}\right]dx =$$

$$= \int_{0}^{b} f(x)\left(\frac{1}{\alpha^{kx}+1} + \frac{\alpha^{kx}}{\alpha^{kx}+1}\right)dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 148

Έστω $\alpha \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ και **f,g** δυο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο **[-b,b]**. Αν η **f** είναι άρτια και η **g** είναι περιττή, να δείξετε ότι:

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

Λύση

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx = \int_{-b}^{0} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx + \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx =$$

$$= \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx + \int_{0}^{b} \frac{f(-x)}{\alpha^{g(-x)}+1}dx = \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx + \int_{0}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(-x)}+1}dx =$$

$$= \int_{0}^{b} f(x)\left[\frac{1}{\alpha^{g(x)}+1} + \frac{1}{\alpha^{g(-x)}+1}\right]dx = \int_{0}^{b} f(x)\left(\frac{1}{\alpha^{g(x)}+1} + \frac{1}{\alpha^{-g(x)}+1}\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{b} f(x)\left(\frac{1}{\alpha^{g(x)}+1} + \frac{\alpha^{g(x)}}{\alpha^{g(x)}+1}\right)dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 149

Να δείξετε ότι αν η $\mathbf{f:R\to R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και παραγωγίσιμη στο (α,b), τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$ ή

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt=\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt$$

Λύση

Έστω $g:[\alpha,b]\to R$ με $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\int_{x}^{b} f(t)\,dt$ $g(\alpha)=g(b)=0$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[\alpha,b]$ οπότε πληρεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle. Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$

Όμως $g'(x)=f(x)\int_{x}^{b} f(t)\,dt-f(x)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt=$

$$f(x)\left[\int_{x}^{b} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right]$$

Συνεπώς υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)\left(\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt\right)=0\quad\Rightarrow\quad f(\xi)=0$$

ή $\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt$

ΘΕΜΑ 150

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)+f(-x)=1$, για κάθε $x\in R$. Να υπολογιστεί το ολο-

κλήρωμα:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt \quad , \quad \alpha \in R$$

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής είναι και ολοκληρώσιμη στο R και έχουμε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x)+f(-x))\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx = \Big[x\Big]_{-\alpha}^{\alpha}$$

Όμως αν θέσουμε $-x = t \;\Rightarrow\; dx = -dt$ και

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx = -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(t)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Άρα $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\alpha \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$

ΘΕΜΑ 151

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f{:}R \to R}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $\mathbf{f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2b}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$. Να δείξετε ότι:

$$\int_{0}^{2\alpha} \mathbf{f(t)\,dt = 2\alpha b}$$

Λύση

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)\,dx=2b\int_{-\alpha}^{\alpha} dx$$

Θέτουμε $\alpha\text{-}x = t \;\Rightarrow\; dx = -dt \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)\,dx=-\int_{2\alpha}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{2\alpha} f(t)\,dt$$

Θέτουμε $\alpha+x = u \;\Rightarrow\; dx = du \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)\,dx=\int_{0}^{2\alpha} f(u)\,du$$

Άρα $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha-x)\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\alpha+x)\,dx=\int_{0}^{2\alpha} f(t)\,dt+\int_{0}^{2\alpha} f(t)dt=4\alpha b \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{2\alpha} f(t)\,dt=4\alpha b \;\Rightarrow\; \int_{0}^{2\alpha} f(t)\,dt=2\alpha b$$

ΘΕΜΑ 152

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,b]\to[c,d]}$ μια συνάρτηση **"1-1"**. Αν η **f** είναι παραγωγίσιμη και η **f′** είναι συνεχής, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx+\int_{c}^{d} f^{-1}(x)\,dx=bd-\alpha c$$

Λύση

Θέτουμε $f^{-1}(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = f(y) \;\Leftrightarrow\; dx = f'(y)dy$

Έχουμε $y(c) = \alpha$ και $y(d) = b$

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx+\int_{c}^{d} f^{-1}(x)\,dx=\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx+\int_{y(c)}^{y(d)} y\,f'(y)\,dy=$$

$$= \int_\alpha^b f(x)\,dx + \int_\alpha^b x\,f'(x)\,dx = \int_\alpha^b (x\,f'(x)\,dx + f(x))\,dx = \int_\alpha^b (x\,f(x))'\,dx =$$

$$= \Big[x\,f(x)\Big]_\alpha^b = b\,f(b) - \alpha\,(f(\alpha) = bd - \alpha c$$

ΘΕΜΑ 153

Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$

Λύση

$$\left|\int_0^1 \left(1\,\sqrt{1+x^3}\right)dx\right| \le \sqrt{\int_0^1 dx \int_0^1 (1+x^3)\,dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx\right| \le \sqrt{\Big[x\Big]_0^1 \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \le \sqrt{1\left(\frac{1}{4}+1\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ΘΕΜΑ 154

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$\mathbf{F(x) = \int_0^x (t-\alpha)\,(t-\beta)\,dt\ ,\ \alpha, \beta > 0\ ,\ \alpha < \beta}$$

Λύση

$F'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) = 0 \Leftrightarrow x_1=\alpha$ ή $x_2=\beta$

$F''(x) = x-\beta+x-\alpha = 2x-\alpha-\beta$

$F''(\alpha) = \alpha-\beta<0 \Leftrightarrow$ η F παρουσιάζει στο $x=\alpha$ τοπικό μέγιστο

$F''(\beta) = \beta-\alpha>0 \Leftrightarrow$ η F παρουσιάζει στο $x=\beta$ τοπικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 155

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,b]\to R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$. Να δείξετε ότι:

$$\left(\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \le (b-\alpha)\int_\alpha^b f^2(x)\,dx$$

Λύση

$$\left(\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x\,dx\right)^2 \le \int_\alpha^b f^2(x)\,dx\int_\alpha^b \eta\mu^2 x\,dx$$
$$\left(\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right)^2 \le \int_\alpha^b f^2(x)\,dx\int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx \qquad (1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις *(1)* έχουμε

$$\left(\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x\,dx\right)^2 + \left(\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right)^2 \le \int_\alpha^b f^2(x)\,dx\int_\alpha^b dx =$$

$$= (b-\alpha)\int_\alpha^b f^2(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 156

Δίνονται δύο πολυώνυμα $\mathbf{P(x)}$ και $\mathbf{Q(x)}$ με θετικούς συντελεστές, τέτοια ώστε $\mathbf{\beta\alpha\theta\mu.P(x)<\beta\alpha\theta\mu.Q(x)}$. Έστω $\mathbf{f\,,\,g : [0\,,\,1] \to R_+}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{P(\eta)+x}dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(\eta)+x}dx \quad , \text{ για κάθε } \quad \eta \in N^*$$

Να δείξετε ότι $\mathbf{f(x)=0}$, για κάθε $\mathbf{x \in [0,1]}$

Λύση

$$\frac{f(x)}{P(\eta)+1} \le \frac{f(x)}{P(\eta)+x} \le \frac{f(x)}{P(\eta)} \quad \text{και} \quad \frac{g(x)}{Q(\eta)+1} \le \frac{g(x)}{Q(\eta)+x} \le \frac{g(x)}{Q(\eta)}$$

για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{f(x)}{P(\eta)+1}dx \le \int_0^1 \frac{f(x)}{P(\eta)+x}dx \le \int_0^1 \frac{f(x)}{P(\eta)}dx\\ &\int_0^1 \frac{g(x)}{Q(\eta)+1}dx \le \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(\eta)+x}dx \le \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(\eta)}dx\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{P(\eta)+1}dx \le \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(\eta)}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{P(\eta)+1}{Q(\eta)}\int_0^1 g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\eta\to\infty}\int_0^1 f(x)\,dx \le \lim_{\eta\to\infty}\frac{P(\eta)+1}{Q(\eta)}\int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

Όμως $f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \lim_{\eta\to\infty}\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

Αφού $f(x)\geq 0$, f συνεχής στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0 \;\Rightarrow\; f(x)=0\text{ , για κάθε } x\in[0,1]$$

ΘΕΜΑ 157

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι:

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\alpha\int_0^\alpha f^2(x)\,dx}\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}_+$$

Εφαρμογή: $$0\leq\int_0^\pi \sqrt{x}\,\eta\mu x\,dx\leq\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}\quad (1)$$

Λύση

f συνεχής $\Rightarrow$ f^2 - συνεχής $\Rightarrow$ υπάρχει $\int_0^\alpha f^2(x)\,dx$, για κάθε $\alpha\geq 0$

$f^2(x)\geq 0 \;\Rightarrow\; \int_0^\alpha f^2(x)\,dx\geq 0 \;\Rightarrow\;$ υπάρχει $\sqrt{\alpha\int_0^\alpha f^2(x)\,dx}$

f - συνεχής $\Rightarrow$ $f+\lambda$ - συνεχής , για κάθε $\lambda\in R$ $\Rightarrow$ $(f(x)+\lambda)^2\geq 0$

$\Rightarrow \int_0^\alpha (f(x)+\lambda)^2\,dx\geq 0 \;\Rightarrow\; \int_0^\alpha f^2(x)\,dx+2\lambda\int_0^\alpha f(x)\,dx+\lambda^2\int_0^\alpha dx\geq 0,\ \forall\ \lambda\in R\Rightarrow$

$\Delta\leq 0 \;\Rightarrow\; \left(\int_0^\alpha f(x)\,dx\right)^2-\alpha\int_0^\alpha f^2(x)\,dx\leq 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right|\leq\sqrt{\alpha\int_0^\alpha f^2(x)\,dx}$

Εφαρμογή: $f(x)=\sqrt{x}\,\eta\mu x$ $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,\pi]$

Για $\alpha=\pi$, η *(1)* γράφεται:

$$\left|\int_0^{\pi} \sqrt{x}\ \eta\mu x\, dx\right| \leq \sqrt{\pi \int_0^{\pi} x\, \eta\mu^2 x\, dx} = \sqrt{\pi}\sqrt{\int_0^{\pi} x\, \eta\mu^2 x\, dx}$$

$$\int_0^{\pi} x\, \eta\mu^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,(1-\sigma\upsilon\nu 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\, \sigma\upsilon\nu 2x\, dx = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x\,(\eta\mu 2x)'\, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\left[\left[x\, \eta\mu 2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \eta\mu 2x\, dx\right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \eta\mu 2x\, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu 2x)'\, dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

Άρα $\quad 0 \leq \int_0^{\pi} \sqrt{x}\ \eta\mu x\, dx \leq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$

ΘΕΜΑ 158

Έστω $\mathbf{u:[0,\alpha]\rightarrow[0,b]}$ μια συνάρτηση συνεχής και γνησίως μονότονη. Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\alpha} \mathbf{u(t)\, dt} + \int_0^{b} \mathbf{u^{-1}(t)\, dt = \alpha\, b}$

Λύση

Θέτουμε $\quad u^{-1}(t) = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad t = u(\varphi) \quad \Rightarrow dt = d\varphi\, u'(\varphi)$

$$\Rightarrow \int_0^{b} u^{-1}(t)\, dt = \int_0^{\alpha} \varphi\, u'(\varphi)\, d\varphi = \left[\varphi\, u(\varphi)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} u(\varphi)\, d\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} u(t)\, dt = \int_0^{b} u^{-1}(t)\, dt =$$

$$= \left[\varphi\, u(\varphi)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} u(\varphi)\, d\varphi + \int_0^{\alpha} u(t)\, dt = \alpha u(\alpha) = \alpha\, b$$

ΘΕΜΑ 159

Έστω **$h:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$** μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο **$[0,\alpha]$** και

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (h(x)-h(t))\,dt\ ,\ g(x)=\int_x^\alpha \frac{f(t)}{t}\,dt\ ,\ x\in(0,\alpha]}\ .$$

Να δείξετε ότι: $\mathbf{\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha h(t)\,dt = f(x)-h(x)-g(x)}$, για κάθε **$x\in(0,\alpha]$**

Λύση

$$f(x)=h(x)-\frac{1}{x}\int_0^x h(t)\,dt \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,\alpha] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=h'(x)-\left(-\frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt+\frac{1}{x}h(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=h'(x)-\frac{h(x)\,x-\int_0^x h(t)\,dt}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,\alpha]$ και g - παραγωγίσιμη και

$$g'(x)=-\frac{f(x)}{x}=-\frac{h(x)}{x}+\frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=h'(x)+g'(x) \quad \Rightarrow \quad (f(x)-g(x)-h(x))'=0\ ,\ \text{για κάθε} \quad x\in(0,\alpha]$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-g(x)-h(x)=c \quad (c\in\mathbb{R},\ \text{σταθερό}) \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,\alpha]$$

Για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)-g(\alpha)-h(\alpha)=c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha)-g(\alpha)-h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha h(t)\,dt$$

Άρα $f(x)-g(x)-h(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha h(t)\,dt$, για κάθε $x\in(0,\alpha]$

ΘΕΜΑ 160

Έστω **$f:[0,1]\to R$** μια συνεχής συνάρτηση. Ποιες από τις παρακάτω συνεπαγωγές είναι αληθείς;

1) $$\int_0^1 f(x)\,dx=0 \Rightarrow f(x)=0 \text{, για κάθε } x\in(0,1]$$

2) $$\int_0^1 f^2(x)\,dx=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=0$$

Λύση

Η πρώτη πρόταση δεν είναι αληθής

Έστω $f:[0,1]\to R$, με $f(x)=x-\frac{1}{2}$

Έχουμε $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

Έχουμε $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0$ και όμως $f(x)\neq 0$

Από την ανισότητα Cauchy-Buniakowski έχουμε

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leq\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$$

Άρα $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leq 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=0$

ΘΕΜΑ 161

Έστω **f** μια συνάρτηση συνεχής στο **$[\alpha,b]$, $f(x)>0$** για κάθε

$x \in [\alpha, b]$ και $\int_\alpha^b f(x)\,dx = 0$. Να δείξετε ότι $\alpha = b$.

Λύση

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο $[\alpha,b]$.

Έχουμε $\int_\alpha^b f(x)\,dx = F(b) - F(\alpha) = 0$ και $F'(x) = f(x) > 0$

Αφού $F'(x) > 0 \Rightarrow$ η F είναι γν. αύξουσα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η F είναι "1-1" $\Rightarrow$ $F(\alpha) = F(b) \Rightarrow \alpha = b$

ΘΕΜΑ 162

Να δείξετε ότι αν $0<y<x$, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$$

Λύση

Για κάθε $t>1$ έχουμε $\frac{1}{2t} > \frac{2}{(1+t)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^{x/y} \frac{dt}{2t} > \int_1^{x/y} \frac{2dt}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^{x/y} \frac{dt}{t} > 2\int_1^{x/y} \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Έστω $I = \int_1^{x/y} \frac{dt}{(1+t)^2}$ Θέτουμε $1+t=z$ $dt=dz \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_2^{\frac{x+y}{y}} \frac{dz}{z^2} = \int_2^{\frac{x+y}{y}} z^{-2}\,dt = \left[-\frac{1}{z}\right]_2^{\frac{x+y}{y}} = -\frac{y}{x+y} + \frac{1}{2} =$$

$$=\frac{x+y-2y}{2(x+y)}=\frac{x-y}{2(x+y)}$$

Άρα $\frac{1}{2}\int_1^{x/y}\frac{dt}{t}>2\int_1^{x/y}\frac{dt}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\Big[\ln t\Big]_1^{x/y}>2\frac{x-y}{2(x+y)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \frac{\ln x-\ln y}{2}>\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \frac{x+y}{2}>\frac{x-y}{\ln x-\ln y}$$

ΘΕΜΑ 163

Έστω $\mathbf{f:[0,1]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής και $\mathbf{P:R\to R}$ ένα πολυώνυμο τέτοιο, ώστε $\mathbf{P(0)=0}$ και $\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx=P(1)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in(0,1)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=P'(x_0)}$

Λύση

Έστω η συνάρτηση $F:[0,1]\to R$ με $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx-P(x)$

Επειδή η F είναι συνεχής στο $[\alpha,1]$ και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,1]$, με $F(0)=F(1)=0$, βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(x_0)=0$ δηλαδή $f(x_0)-P'(x_0)=0 \Leftrightarrow P'(x_0)=f(x_0)$

ΘΕΜΑ 164

Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,b]$, τότε η εξίσωση: $\mathbf{f(x)\int_x^b g(x)\,dx=g(x)\int_\alpha^x f(x)\,dx}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,b).

Λύση

Έστω $H:[\alpha,b]\to R$ με $H(x)=\int_\alpha^x f(x)\,dx\int_b^x g(x)\,dx$

$$H'(x)=f(x)\int_b^x g(x)\,dx+g(x)\int_\alpha^x f(x)\,dx$$

$H(\alpha)=H(b)=0$ και η H είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και παραγωγίσιμη στο (α,b), οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $H'(c)=0$, δηλαδή

$$f(c)\int_b^c g(x)\,dx+g(c)\int_\alpha^c f(x)\,dx=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c)\int_c^b g(x)\,dx=g(c)\int_\alpha^c f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 165

Να δείξετε ότι αν οι f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,b]$ και $\int_\alpha^b f(x)\,dx=\int_\alpha^b g(x)\,dx$ τότε υπάρχει $c\in[\alpha,b]$ τέτοιο, ώστε $f(c)=g(c)$.

Λύση

Από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$0=\int_\alpha^b (f(x)-g(x))\,dx=[f(c)-g(c)]\,(b-\alpha)\ ,\quad c\in[\alpha,b]$$

Άρα $f(c)-g(c)=0 \Rightarrow$ υπάρχει $c\in[\alpha,b]$ τέτοιο, ώστε $f(c)=g(c)$.

ΘΕΜΑ 166

Αν η **$f:[\alpha,b]\to R_+$ $(0<\alpha<b\ ,\ \alpha,b\in R)$** είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο **$[\alpha,b]$** και **$f'(x)<0$**, για κάθε **$x\in[\alpha,b]$** , τότε ισχύει η σχέση:

$$\sqrt{\int_\alpha^x f(t)\,dt}+\sqrt{\int_\alpha^y f(t)\,dt}\le 2\sqrt{\int_\alpha^{\frac{x+y}{2}} f(t)\,dt},$$

για κάθε **$x\in[\alpha,b]$**

Λύση

Έστω $h:[\alpha,b]\to R_+$, με $h(x) = (goF)(x)$, όπου $g:R_+\to R$, $g(u)=\sqrt{u}$ και $F:[\alpha,b]\to R_+$ με $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι μια αρχική συνάρτηση της φ στο $[\alpha,b]$. (Η F υπάρχει διότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$)

$F'(x) = f(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,b]$ και $F''(x) = f'(x) < 0$

Άρα η F είναι κυρτή στο $[\alpha,b]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ και $g'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}>0$ οπότε η g είναι γν. αύξουσα στο $(0,\infty)$.

Επίσης $g''(u)=-\frac{1}{4\sqrt{u^3}}<0$ οπότε η g είναι μη κυρτή στο $(0,\infty)$.

Επειδή η g είναι μη κυρτή και αύξουσα προκύπτει ότι η goF είναι μη κυρτή και έχουμε

$$h(x)+h(y)\le 2h\left(\frac{x+y}{2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\int_\alpha^x f(t)\,dt}+\sqrt{\int_\alpha^y f(t)\,dt}\le 2\sqrt{\int_\alpha^{\frac{x+y}{2}} f(t)\,dt}$$

ΘΕΜΑ 167

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις **f: [0,1] → R** που πληρούν τη σχέση: $\int_0^1 x\,f(x)\,dx \geq \frac{1}{3} \geq \int_0^1 f^2(x)\,dx$

Λύση

Έχουμε $[x-f(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x\,f(x) + f^2(x) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,f(x) \leq \frac{x^2+f^2(x)}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\,f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 x\,f(x)\,dx \leq \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 x\,f(x)\,dx \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Όμως $\int_0^1 x\,f(x)\,dx \geq \frac{1}{3}$ οπότε $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \frac{1}{3}$

Έχουμε $x\,f(x) \leq \frac{x^2}{2} + \frac{f^2(x)}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\,f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\,dx \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{3}$

Όμως $\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq \frac{1}{3}$ οπότε $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}$

Άρα $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+f^2(x)}{2}\,dx$ ή $\int_0^1 [x-f(x)]^2\,dx = 0$

Αφού η f είναι συνεχής στο [0,1] $\Rightarrow (x-f(x))^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

ΘΕΜΑ 168

Έστω $\mathbf{F=\{f:[0,1]\to[0,2]}$, **f** συνεχής, $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx=1\}}$. Να δείξετε ότι αν $\mathbf{f{\cdot}f^2\in F}$, τότε η **f** είναι σταθερή.

Λύση

Είναι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$ και $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=1$

$$\int_0^1 [f(x)-1]^2\,dx=\int_0^1 f^2(x)\,dx-2\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 dx=1-2+1=0$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-1]^2\,dx=0$

Όμως η f είναι συνεχής και $[f(x)-1]^2\geq 0$,
οπότε $f(x)-1 = 0$ και $f(x) = 1$.

ΘΕΜΑ 169

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f:[0,\infty]\to R}$ με $\mathbf{f(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x\in[0,+\infty)}$, που πληρούν τη σχέση:

$$\mathbf{2x\int_0^x f(u)\,du=f(x)}\text{ , για κάθε } \mathbf{x>0}\text{ .}$$

Λύση

Έχουμε $\displaystyle\int_0^x f(u)\,du=\frac{f(x)}{2x} \Rightarrow f(x)=\frac{2x\,f'(x)-2f(x)}{4x^2} \Rightarrow$

➤ $4x^2f(x)+2f(x) = 2xf'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2x^2+1}{x}$, $x>0$

➤ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-2x-\dfrac{1}{x}=0$, $x>0 \Rightarrow (\ln f(x)-x^2-\ln x)'=0$

➤ $\ln f(x)-x^2-\ln x=c\in R$, c σταθερός $\Rightarrow$

➤ $\ln f(x)=\ln x+x^2+c \Rightarrow f(x)=e^{\ln x+x^2+c} \Rightarrow$

➤ $f(x)=e^{\ln x}\cdot e^{x^2}\cdot e^c=\alpha x e^{x^2}$, όπου $\alpha = e^c > 0$

Άρα $f(x)=\alpha x e^{x^2}$, $x>0$

ΘΕΜΑ 170

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις **f:R₊→R** που πληρούν τη σχέση: *(1)* $\displaystyle\int_0^x |\eta\mu f(t)|\,dt=\int_0^1 |\sigma\upsilon\nu f(t)|\,dt$, $x\geq 0$

Λύση

Παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε

(2) $|\eta\mu f(x)| = |\sigma\upsilon\nu f(x)|$, για κάθε $x\geq 0$

Όμως $|\sigma\upsilon\nu f(x)|\neq 0$, διότι αν $\sigma\upsilon\nu f(x) = 0$, τότε $\eta\mu f(x) = 0$.

Η *(2)* γράφεται $\dfrac{|\eta\mu f(x)|}{|\sigma\upsilon\nu f(x)|}=1$ ή $|\varepsilon\varphi(f(x))| = 1$ ή

ή $f(x)=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$, $k\in Z$

ΘΕΜΑ 171

Έστω **α,b∈ R** με **α<b** και **f** μια συνεχής συνάρτηση στο **[α,b]**

που πληροί τη σχέση: $\mathbf{f(\alpha+b-x)=-f(x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,b]}$

(i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\alpha^b \mathbf{f(x)\,dx}$

(ii) Χρησιμοποιώντας την (i) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
$\displaystyle\int_0^\pi \mathbf{συν^{2p+1} x\,dx}$, όπου $\mathbf{p\in N}$.

Λύση

(i) Θέτουμε $\alpha+b-y=x \Rightarrow dx=-dy$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx=\int_b^\alpha f(\alpha+b-y)\,(-dy)=\int_\alpha^b f(\alpha+b-y)\,dy=$$

$$=\int_\alpha^b -f(y)\,dy=-\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Άρα $2\displaystyle\int_\alpha^b f(x)\,dx=0$ και $\displaystyle\int_\alpha^b f(x)\,dx=0$

(ii) Έστω $f(x)=συν^{2p+1}x$, $p\in N$
Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, οπότε είναι

$$f(0+\pi-x)=συν^{2p+1}(\pi-x)=(-συνx)^{2p+1}=-συν^{2p+1}x=-f(x)$$

Άρα για $x\in[0,\pi]$ είναι $f(0+\pi-x)=-f(x)$, οπότε λόγω της (i) είναι

$$\int_0^\pi συν^{2p+1}x\,dx=0 \text{ , για κάθε } p\in N .$$

ΘΕΜΑ 172

Έστω $\mathbf{f,g:[\alpha,b]\to R_+}$, $\mathbf{g}$ συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,b]}$, $\mathbf{F}$ μια αρχική της $\mathbf{f}$ και $\mathbf{f(x)\le g(x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,b]}$. Αν υπάρχουν $\mathbf{x_1,x_2\in(\alpha,b)}$

τέτοιοι, ώστε $\frac{F(x_1)-F(x_2)}{b-\alpha} \geq \sup_{x\in[\alpha,b]} g(x)$ τότε η **g** είναι σταθερή.

Λύση

Έστω G μια αρχική της g. Τότε είναι $(G-F)' = g-f \geq 0$. Άρα η (G-F) είναι αύξουσα.

Είναι $G(b) - F(b) \geq G(\alpha)-F(\alpha)$, οπότε

$$\frac{G(b)-G(\alpha)}{b-\alpha} \geq \frac{F(b)-F(\alpha)}{b-\alpha} \Rightarrow \frac{\int_\alpha^b g(x)\,dx}{b-\alpha} \geq \frac{F(b)-F(\alpha)}{b-\alpha}$$

$f \geq 0 \Rightarrow$ η F είναι αύξουσα $\Rightarrow$ $F(b)-F(\alpha) \geq F(x)-F(y)$ όπου $x,y\in[\alpha,b]$. Άρα έχουμε

$$\frac{F(b)-F(\alpha)}{b-\alpha} \geq \frac{F(x_1)-F(x_2)}{b-\alpha} \geq \sup_{x\in[\alpha,b]} g(x)$$

Έστω $M = \sup_{x\in[\alpha,b]} g(x)$. Τότε είναι

$$M \geq \frac{\int_\alpha^b g(x)\,dx}{b-\alpha} \geq \frac{F(b)-F(\alpha)}{b-\alpha} \geq M$$

Άρα $\int_\alpha^b g(x)\,dx = \int_\alpha^b M \Rightarrow \int_\alpha^b [g(x)-M]\,dx = 0$

Επειδή (g-M) είναι συνεχής και $(g-M) \leq 0 \Rightarrow$
$g(x) = M$, για κάθε $x\in[\alpha,b]$.

ΘΕΜΑ 173

Αν $0 < x_1 < x_2$ και $f: [x_1, x_2] \to R_+^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ και πληρεί τη σχέση:

$$(1)\quad x_1^{\nu-1}\int_0^{x_1} f(t)\,dt - x_2^{\nu+1}\int_0^{x_2} f(t)\,dt = \frac{x_1^{\nu}-x_2^{\nu}}{\nu},$$

όπου $\nu \geq 1,\ \nu \in N$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $(\nu-1)f(\xi) = \xi f'(\xi)$.

Λύση

Έστω $F:[0,\infty]\to R$ με $F(x) = \frac{x^{\nu-1}}{f(x)}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^{\nu}}{\nu}$

Η F είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ενώ $F(x_1) = F(x_2)$ (λόγω της *(1)*). Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = 0$.

Όμως $F'(x) = \frac{(\nu-1)\,x^{\nu-2} f(x) - x^{\nu-1} f'(x)}{f^2(x)}\int_0^x f(t)\,dt + x^{\nu-1} - x^{\nu-1} =$

$$= \frac{x^{\nu-2}}{f^2(x)}\left[(\nu-1)\, f(x)\, d(x) - x\, f'(x)\right]\int_0^x f(t)\,dt$$

Όμως $f(x) > 0$,για κάθε $x \geq 0 \;\Rightarrow\; (\nu\text{-}1)f(\xi)\text{-}\xi f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow\; (\nu\text{-}1)f(\xi) = \xi f'(\xi)$, $\xi \in (x_1, x_2)$

ΘΕΜΑ 174

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[\alpha,b]\to R^{+}$ είναι συνεχείς και $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,b]$ τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,b]$ τέτοιος, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\nu\,\xi^{\nu-1}}{b^{\nu}-\alpha^{\nu}}\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}\,dt$$

Λύση

Έστω $\varphi:[\alpha,b]\to R$ με $\varphi(x)=F(x)-\lambda\dfrac{x^{\nu}}{\nu}$

Επειδή οι f και g είναι συνεχείς στο [α,b] και $g(x)\neq 0$, για κάθε x∈ [α,b] προκύπτει ότι η h/g είναι συνεχής στο [α,b], οπότε υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f/g με $F(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)}{g(t)}dt$. Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [α,b].

Έχουμε $\varphi(\alpha)=F(\alpha)-\lambda\dfrac{\alpha^{\nu}}{\nu}=-\lambda\dfrac{\alpha^{\nu}}{\nu}$ και

$$\varphi(b)=\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}dt-\lambda\frac{b^{\nu}}{\nu}$$

Η φ είναι συνεχής στο [α,b] και παραγωγίσιμη στο (α,b). Θα προσδιορίσουμε το λ έτσι, ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle

$$\varphi(\alpha)=\varphi(b)\ \Rightarrow\ -\lambda\frac{\alpha^{\nu}}{\nu}+\lambda\frac{b^{\nu}}{\nu}=\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}dt\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lambda=\frac{\nu}{b^{\nu}-\alpha^{\nu}}\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}dt$$

Όταν $\lambda=\dfrac{\nu}{b^{\nu}-\alpha^{\nu}}\displaystyle\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}dt$, βάσει του θ. Rolle $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$, δηλαδή

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\lambda\,\xi^{\nu-1}=\frac{\nu\,\xi^{\nu-1}}{b^{\nu}-\alpha^{\nu}}\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}dt$$

ΘΕΜΑ 175

Θεωρούμε το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)\in R[x]}$ με βαθμ. $\mathbf{P(x)\geq 2}$. Αν $\mathbf{P'(x)>0}$ και $\mathbf{P(0)=0,\ P(1)=1}$ να δείξετε ότι:

$$1 \le \int_0^1 [P'(x) + x\,P(x)]\,dx \le \sqrt{e}$$

Λύση

Η P και η P΄ είναι συνεχείς οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο R. Άρα η (P΄+xP) είναι ολοκληρώσιμη στο R, άρα και στο [0,1].

Είναι $P'(x) + x\,P(x) = e^{-x^2/2}\left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]'$

οπότε $\int_0^1 [P'(x) + x\,P(x)]\,dx = \int_0^1 e^{-x^2/2}\left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]'\,dx = I$

Αφού $x \in [0,1] \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{x^2}{2} \le 0 \Rightarrow e^{-1/2} \le e^{-x^2/2} \le e^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \le e^{-x^2/2} \le 1$

Όμως $P'(x)>0$, οπότε η P είναι γν. αύξουσα.

Επειδή $P(0)=0 \Rightarrow P(x) \ge 0\,,\ \forall\ x \in [0,1]$

Άρα $xP(x)+P'(x) > 0 \Rightarrow \left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]' > 0$

Έχουμε $\frac{1}{\sqrt{e}}\int_0^1 \left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]'\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2/2}\left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]'\,dx \le \int_0^1 \left[e^{x^2/2}\,P(x)\right]'\,dx$

Άρα $\frac{1}{\sqrt{e}}\left[e^{1/2}\,P(1) - P(0)\right] \le I \le e^{1/2}\,P(1) - P(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e} \le I \le \sqrt{e} \Rightarrow 1 \le \int_0^1 [P'(x) + x\,P(x)]\,dx \le \sqrt{e}$

ΘΕΜΑ 176

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις **f:[0,1]→R** με την ιδιότητα: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx$ *(1)*

Λύση

Θέτουμε $x=t^2$ οπότε $dx = 2tdt$ και έχουμε:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(t^2)\,2t\,dt = 2\int_0^1 x\,f(x^2)\,dx$$

Η *(1)* γράφεται:

$$\int_0^1 f^2(x^2)\,dx - 2\int_0^1 x\,f(x^2)\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = 0 \quad ή$$

$$\int_0^1 \left[f^2(x^2) - 2x\,f(x^2) + x^2\right] dx = 0 \quad ή$$

$$\int_0^1 \left(f(x^2) - x\right)^2 dx = 0$$

Έστω $g(x) = \left(f(x^2) - x\right)^2$. Η g είναι συνεχής στο [0,1] και $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$

οπότε είναι $g(x) = 0$ ή $f(x^2) = x$ *(1)*, για κάθε $x \in [0,1]$

Για $x^2 = y$ η *(1)* γράφεται $f(y) = \sqrt{y}$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι $f(x) = \sqrt{x}$

ΘΕΜΑ 177

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,b]\to R}$ ολοκληρώσιμη στο **R**, με την ιδιότητα $\int_\alpha^b f(x)\,dx > 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x > (b-\alpha)^{-1}$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) < c\int_\alpha^b f(x)\,dx$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\xi \in (\alpha,b)$ είναι $f(\xi) \geq c\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$

Άρα $\int_{\alpha}^{b} f(\xi)\,d\xi \geq \int_{\alpha}^{b} f(x) \int_{\alpha}^{b} c\,d\xi$

$$\int_{\alpha}^{b} f(\xi)\,d\xi \geq c\,(b-\alpha)\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \quad (\text{αφού} \quad c > \frac{1}{b-\alpha})$$

Άρα $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$ (άτοπο)

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha,b)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) < x\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 178

Έστω $\mathbf{f:[-1,1]\to R}$ μια παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[-1,1]}$, με $\mathbf{f'}$ αύξουσα.

Να δείξετε ότι: $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$$

Λύση

Για $x \in [-1,1]$, υπάρχει $c_x \in [-1,x]$ τέτοιος, ώστε

$$f(x) - f(-1) = (x+1)\,f'(c_x)$$

Όμως $f'(c_x) \leq f'(1)$ διότι η f΄ είναι αύξουσα

Άρα είναι $f(x) - f(-1) \leq f'(1)\,(x+1)$ ή

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - f(-1)]\,dx \leq \int_{-1}^{1} f'(1)\,(x+1)\,dx \quad ή$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2\,f(-1) \leq f'(1)\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{1} \quad ή$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 2f(-1) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) f'(1) \quad ή$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2f(-1) + 2f'(1) \quad ή$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$$

ΘΕΜΑ 179

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,b]\to R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[\alpha,b]}$, με $\mathbf{f''\leq 0}$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{(b-\alpha)^2}{2} f'(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx - (b-\alpha)\,f(\alpha) \geq \frac{(b-\alpha)^2}{2} f'(b)$$

Λύση

Έστω $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt - (x-\alpha)\,f(\alpha) - \frac{(x-\alpha)^2}{2} f'(\alpha)$

Είναι $F'(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{2(x-\alpha)}{2} f'(\alpha) = f(x) - f(\alpha) - (x-\alpha)\,f'(\alpha)$

$F''(x) = f'(x) - f'(\alpha)$

Αφού $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,b]$ η f' είναι φθίνουσα στο $[\alpha,b)$,

οπότε $f'(x) \leq f'(\alpha)$ και $f'(x) - f'(\alpha) \leq 0$,

άρα $F''(x) \leq 0$ οπότε F' φθίνουσα στο $[\alpha,b)$, με $F'(\alpha)=0$.

Άρα $F'(x) \leq 0$ και η F είναι φθίνουσα,

οπότε $F(b) \leq F(\alpha) = 0$ και $F(b) \leq 0$

Άρα $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx - (b-\alpha)\,f(\alpha) \leq \frac{(b-\alpha)^2}{2} f'(\alpha)$

Όμοια εργαζόμαστε και για τη δεύτερη ισότητα. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$G(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt-(x-\alpha)\,f(\alpha)-\frac{(x-\alpha)^2}{2}\,f'(b)$$

και δείχνουμε ότι η G είναι αύξουσα.

ΘΕΜΑ 180

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν ισχύει η ανισότητα:

$$0\le\int_0^x f(t)\,dt\le\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt \quad \textit{(1)},$$

τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Λύση

Έστω $F(x)=\int_0^x [(1-x)\,f(t)+t\,f(t)]\,dt\le 0$ (λόγω της *(1)*)

Υποθέτουμε ότι $x>0$. Τότε $F(x)\le F(0)$, η F είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$,

δηλαδή $F'(x)\le 0$ δηλαδή $F'(x) = f(x)\le 0$ ή $\int_0^x f(t)\,dt\le 0$.

Όμως από την *(1)* είναι $\int_0^x f(t)\,dt\ge 0$

και συνεπώς $\int_0^x f(t)\,dt=0$

Όμως η f είναι συνεχής στο R και $f(x)\le 0$, για κάθε $x\in(0,\infty)$, οπότε $f(x)=0$, για κάθε $x\in(0,\infty)$.

Όμοια εργαζόμαστε και για $x<0$.

ΘΕΜΑ 181

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f:[0,\infty]\to R}$ που πληρούν τη σχέση:

$$(1)\quad \mathbf{συν\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{x}{1+x}}, \text{ για κάθε } \mathbf{x\in[0,\infty]}$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την *(1)* και είναι

$$-f(x)\,ημ\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{και έχουμε}$$

$$f^2(x)\,ημ^2\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{1}{(1+x)^4} \quad (2)$$

Επίσης είναι

$$f^2(x)\,συν^2\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{x^2}{(1+x)^2}f^2(x) \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις *(2)* και *(3)* και βρίσκουμε

$$f^2(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}f^2(x)+\frac{1}{(x+1)^4} \quad \text{ή}$$

$$f^2(x)\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)=\frac{1}{(x+1)^4} \quad \text{ή}$$

$$f^2(x)\left(\frac{x^2+2x+1-x^2}{(x+1)^2}\right)=\frac{1}{(x+1)^4} \quad \text{ή}$$

$$f^2(x)\,\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^4} \quad \text{ή}$$

$$f^2(x)=\frac{(x+1)^2}{(x+1)^4(2x+1)} \quad \text{ή}$$

$$f^2(x)=\frac{1}{(x+1)^2(2x+1)} \quad \text{και}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x>0$$

ΘΕΜΑ 182

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις **$f:[1,\infty]\to R$** τέτοιες, ώστε:

$$(1) \quad \int_x^{x^2} f(t)\,dt = \int_1^x t\,f(t)\,dt, \quad x\in[1,\infty]$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε

$$2x\,f(x^2) - f(x) = x\,f(x) \quad ή \quad 2x\,f(x^2) = (x+1)\,f(x)$$

Θέτουμε $f(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}g(x)$, $x\in(1,\infty)$ και είναι

$$g(x^2) = \frac{x^2\ln x^2\,f(x^2)}{x^2-1} = \frac{\dfrac{2x^2\ln x\,(x+1)\,f(x)}{2x}}{(x-1)\,(x+1)} =$$

$$= \frac{x\ln x\,(x+1)\,f(x)}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{x\ln x\,f(x)}{x-1} = g(x)$$

Άρα $g(x) = k$, για κάθε $x\in(1,\infty)$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\,(x-1)}{x\ln x}, & x\in(1,\infty) \\ 0, & αν \ x=1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 183

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$ μια συνάρτηση μονότονη. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in \mathbf{R}_+$ είναι: $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx\geq 0$

Λύση

Παρατηρούμε ότι fof είναι αύξουσα, οπότε είναι

$$(x-y)\,[f(f(x))-f(f(y))]\geq 0\ ,\quad x,y\in[-\alpha,\alpha]$$

$$x\,f(f(x))+y\,f(f(y))\geq y\,f(f(x))+x\,f(f(y))\quad \text{οπότε}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha} y\,f(f(y))\,dx\geq \int_{-\alpha}^{\alpha} y(f(f(x))\,dx+\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(y))\,dx$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx+2\alpha y\,f(f(y))\geq y\int_{-\alpha}^{\alpha} f(f(x))\,dx$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx\right)dy+2\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} y\,f(f(y))\,dy\geq \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(y\int_{-\alpha}^{\alpha} f(f(x))\,dx\right)dy$$

$$2\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx+2\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} y\,f(f(y))\,dy\geq 0\quad \text{ή}$$

$$4\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx\geq 0\quad \text{ή}\quad \int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(f(x))\,dx\geq 0\ ,\quad \alpha>0$$

ΘΕΜΑ 184

Αν η $\mathbf{f}$ είναι μια περιττή συνάρτηση, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: $\displaystyle \mathbf{I_1=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma\upsilon\nu\ \nu x\,dx}$, $\displaystyle \mathbf{I_2=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\eta\mu\ \nu x\,dx}$

Λύση

Η f είναι περιττή και η συνάρτηση συν νx είναι άρτια, οπότε η f(x) συν νx είναι μια περιττή συνάρτηση.

Συνεπώς $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{συν}\,\nu x\,dx = 0$

Η f είναι περιττή και η συνάρτηση ημ νx είναι περιττή, οπότε η f(x) ημ νx είναι μια άρτια συνάρτηση.

Άρα $I_2 = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{ημ}\,\nu x\,dx$

ΘΕΜΑ 185

Έστω **f:R→R** μια συνάρτηση που έχει μια αρχική που δεν είναι "**1-1**". Να δείξετε ότι η **f** μηδενίζεται τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Λύση

Έστω F μια αρχική της f η οποία δεν είναι "1-1".

Άρα υπάρχουν $x_1 < x_2$ τέτοιοι, ώστε $F(x_1) = F(x_2)$

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ και $F(x_1) = F(x_2)$ οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $F'(c) = 0$, δηλαδή $f(c) = 0$.

ΘΕΜΑ 186

Αν η **f** είναι συνεχής στο $[0,1]$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} x \int_{x}^{1} \frac{f(t)}{t^2}\,dt$$

Λύση

Έστω $g(t)=\frac{1}{t^2}$

Υπάρχει $c_x \in [x,1]$ τέτοιο, ώστε

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt = f(c_x)\int_x^1 t^{-2}\,dt = f(c_x)\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = f(c_x)\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to 1} x\int_x^1 \frac{f(t)\,dt}{t^2} = \lim_{x\to 1} f(c_x)\,(1-x)=0$$

ΘΕΜΑ 187

Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^{\alpha} x}\,dx=\frac{\pi}{4}\ ,\quad \alpha\in \mathbb{R}^*$

Λύση

$$I=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\varepsilon\varphi x)^{\alpha}}$$

Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-t \;\Rightarrow\; dx=-dt$ και έχουμε

$$I=-\int_{\pi/2}^{0} \frac{dt}{1+\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^{\alpha}} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{dt}{1+\frac{1}{(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}}} =$$

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}}{1+(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}+1-1}{(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}+1}\,dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\varepsilon\varphi t)^{\alpha}+1} = \frac{\pi}{2}-I$$

Άρα $2I=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; I=\frac{\pi}{4}$

ΘΕΜΑ 188

Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{4}{3} \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx$

Λύση

Έστω $g(x) = e^{x^2} - (x^2+1)$, $x \in [0,1]$

Είναι $g'(x) = 2x\,e^{x^2} - 2x = 2x\,(e^{x^2} - 1)$

$x^2 \ge 0 \Rightarrow e^{x^2} \ge e^0 \Rightarrow e^{x^2} - 1 \ge 0$

Άρα $g'(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$ και $g(x) \ge g(0)$

Όμως $g(0) = 0$, οπότε $e^{x^2} - (x^2+1) \ge 0$ ή

$e^{x^2} \ge (x^2+1)$, για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα είναι $\int_0^1 (x^2+1)\,dx \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx$ ή

$\frac{1}{3} + 1 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx$ ή $\frac{4}{3} \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx$

ΘΕΜΑ 189

Έστω $\mathbf{g:[0,\infty]\to R_+}$, με $\mathbf{g(x+y) \le g(x)\,g(y)}$ και

$\int_0^t g(x)\,dx \le M < \infty$, όπου **M** είναι ανεξάρτητο του **t**. Αποδείξτε

ότι:

(i) $4g(x) \le [g(x-u)+g(u)]^2$, για κάθε $u \in (0,x)$

(ii) $[g(x)]^{1/2} \le \frac{M}{x}$

Λύση

(i) Για κάθε $u \in (0,x)$ έχουμε:

$$4g(x) = 4g[(x-u)+u] \le 4g(x-u)\,g(u) \le [g(x-u)+g(u)]^2$$

(ii) Από την (i) έχουμε $\sqrt{g(x)} \le \frac{g(x-u)+g(u)}{2}$ για κάθε $u \in (0,x)$.

Άρα $x\sqrt{g(x)} = \int_0^x \sqrt{g(x)}\,du \le \frac{1}{2}\int_0^x [g(x-u)+g(u)]\,du =$

$$\frac{1}{2}\int_0^x g(x-u)\,du + \frac{1}{2}\int_0^x g(u)\,du \le \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M$$

Άρα $\sqrt{g(x)} \le \frac{M}{x}$

ΘΕΜΑ 190

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\varepsilon\varphi x)\,dx$

Λύση

Θέτουμε $x = \frac{\pi}{4} - y$

Έχουμε $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\varepsilon\varphi x)\,dx =$

$$=\int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)dy=\int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\varepsilon\varphi x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/4} \ln 2\,dx - I$$

Άρα $2I=\ln 2\int_0^{\pi/4} dx \Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

ΘΕΜΑ 191

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνάρτηση συνεχής που πληρεί τις προϋποθέσεις:

(i) $\mathbf{f(\alpha)\neq 0}$

(ii) υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε $\int_\alpha^c \mathbf{f(x)\,dx=0}$

(iii) $\mathbf{f(\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<0}$

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$.

Λύση

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(\alpha,c)$ τέτοιο, ώστε

$\int_\alpha^c f(x)\,dx=(c-\alpha)(f(x_1)=0$. Άρα $f(x_1)=0$

- Έστω $f(\alpha)>0$, τότε $f(\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<0$

οπότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<0$

Οπότε υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$(\beta - \alpha) f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < 0$

Επειδή $f(\alpha) > 0$ και $f(x_2) < 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 0$

- Αν $f(\alpha) < 0$ είναι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

οπότε υπάρχει $x_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$(\beta - \alpha) f(x_3) > 0 \Leftrightarrow f(x_3) > 0$

Άρα βάσει του Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\alpha, x_3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_2) = 0$

ΘΕΜΑ 192

Έστω $\mathbf{f: [\alpha,\beta] \to R}$, μια συνάρτηση συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c \in [\alpha,\beta]}$ τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{f(c)\left(\int_\alpha^c f(t)\,dt - \int_c^\beta f(t)\,dt\right) = \int_\alpha^c f(t)\,dt \int_c^\beta f(t)\,dt}$$

Λύση

Έστω $g(x) = e^x \int_\alpha^x f(t)\,dt \int_x^\beta f(t)\,dt$

$g(\alpha) = g(\beta) = 0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(c) = 0$,

$$g'(x) = e^x \int_\alpha^x f(t)\,dt \int_x^\beta f(t)\,dt + e^x\left[f(x)\int_x^\beta f(t)\,dt - f(x)\int_\alpha^x f(t)\,dt\right]$$

$$g'(c) \Leftrightarrow e^c \int_\alpha^c f(t)\,dt \int_c^\beta f(t)\,dt + e^c\left[f(c)\int_c^\beta f(t)\,dt - f(c)\int_\alpha^c f(t)\,dt\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(c)\left(\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt-\int_{c}^{\beta} f(t)\,dt\right)=\int_{\alpha}^{c} f(t)\,dt\int_{c}^{\beta} f(t)\,dt$$

ΘΕΜΑ 193

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R_{+}^{*}}$ μια συνάρτηση συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha\,,\beta)}$ τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{\ln f(c)\int_{c}^{\beta} e^{f(t)}\,dt=e^{f(c)}\int_{\alpha}^{c}\ln f(t)\,dt}$$

Λύση

Έστω $h(x)=\int_{\alpha}^{x}\ln f(t)\,dt\int_{x}^{\beta} e^{f(t)}\,dt\ ,\ x\in[\alpha,\beta]$

$h(\alpha)=h(\beta)=0$, οπότε βάσει του θ. Rolle υπάρχει $c\in(\alpha\,,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(c)=0$

$$h'(x)=\ln f(x)\int_{x}^{\beta} e^{f(t)}\,dt+\int_{\alpha}^{x}\ln f(t)\,dt\,(-e^{f(x)})$$

$$h'(c)=0\iff \ln f(c)\int_{c}^{\beta} e^{f(t)}\,dt=e^{f(c)}\int_{\alpha}^{c}\ln f(t)\,dt$$

ΘΕΜΑ 194

Έστω $\mathbf{f:(0,\infty)\to(1,\infty)}$ μια συνάρτηση συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c\in(e\,,e+1)}$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_e^{e+1} f(\ln x)\,dx \geq \frac{f(\ln c)}{f(c)-1}\int_e^{e+1} \ln(f(x))\,dx$$

Λύση

Έστω $F(x)=\int_e^x f(\ln t)\,dt$, $G(x)=\int_e^x \ln(f(t))\,dt$

Βάσει του θ. Cauchy υπάρχει $c\in(e,e+1)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{F(e+1)-F(e)}{G(e+1)-G(e)}=\frac{F'(c)}{G'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_e^{e+1} f(\ln t)\,dt}{\int_e^{e+1} \ln(f(t))\,dt}=\frac{f(\ln c)}{\ln(f(c))} \quad (1)$$

Όμως για $x\geq 1$ ισχύει η ανισότητα $\ln x \leq x-1$, οπότε $\ln f(c)\leq f(c)-1$

Συνεπώς η *(1)* γράφεται:

$$\int_e^{e+1} f(\ln x)\,dx \geq \frac{f(\ln c)}{f(c)-1}\int_e^{e+1} \ln(f(x))\,dx$$

ΘΕΜΑ 195

Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $F:[0,+\infty)\to R$ μια αρχική της f με $F(0)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c\in(1,\nu)$, $\nu>1$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\ln c)=\frac{F(\ln \nu)}{\ln \nu}.$$

Λύση

$$\int_1^{\nu} f(\ln x)\frac{1}{x}\,dx = f(\ln c)\int_1^{\nu}\frac{1}{x}\,dx = f(\ln c)\,\Big[\ln x\Big]_1^{\nu} =$$

$$= f(\ln c)\ln\nu \quad , \quad c\in(1,\nu)$$

Όμως $\displaystyle\int_1^{\nu} f(\ln x)\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\nu}(\ln x)'\,f(\ln x)\,dx =$

$$= \int_1^{\nu} f'(\ln x)\,dx = \Big[F(\ln x)\Big]_1^{\nu} = F(\ln\nu) - F(0) = F(\ln\nu)$$

Άρα υπάρχει $c\in(1,\nu)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\ln c)\ln\nu = F(\ln\nu) \quad\Leftrightarrow\quad f(\ln c) = \frac{F(\ln\nu)}{\ln\nu}$$

ΘΕΜΑ 196

Αποδείξτε ότι αν η $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, είναι μια συνάρτηση συνεχής, τότε υπάρχει $\mathbf{c\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε:

$$\alpha\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \beta\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\,f(x)\,dx$$

Λύση

Έστω $F:[\alpha,\beta]\to R$, με $\displaystyle F(t)=\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx$

Η f είναι συνεχής, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη και
$F'(t) = f(t)$, για κάθε $t\in[\alpha,\beta]$.

Έχουμε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} x\,f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\,F'(x)\,dx = \Big[x\,F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx =$

$$= \beta F(\beta) - \alpha F(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = \beta \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx$$

Βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = (\beta - \alpha) F(c)$$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \beta \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - (\beta - \alpha) F(c) =$

$$= \beta \left(\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx \right) - (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx =$$

$$= \beta \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \beta \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx - \beta \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \alpha \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx =$$

$$= \beta \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx + \alpha \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx$$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \beta \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx + \alpha \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 197

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $\mathbf{f:[0,1]\rightarrow R}$, δυο φορές παραγωγίσιμες, που πληρούν τις συνθήκες $\mathbf{f(0)=f'(0)=1}$, $\mathbf{f''(x)\geq 0}$, $\mathbf{x\in (0,1)}$, $\mathbf{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}}$

Λύση

Έστω $g(x) = f(x)-1-x$, $x\in[0,1]$

$(g(0) = f(0)-1 = 0$

$g'(0) = 0$

$g''(x) = f''(x) \geq 0$

Άρα $g(x) \geq 0$, για $x\in[0,1]$

Όμως $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{3}{2} = 0$

$\int_0^1 g(x)\,dx = 0$, $g(x) \geq 0$ και g-συνεχής

οπότε $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα $f(x) = x+1$, $x \in [0,1]$.

ΘΕΜΑ 198

Έστω $\mathbf{f: [0,1] \to R}$, μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $\mathbf{f''}$ συνεχής στο $\mathbf{[0,1]}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{c \in (0,1)}$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(c)}$$

Λύση

Είναι $\int_0^1 f(x)\,dx = \Big[(x-1)\,f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (x-1)\,f'(x)\,dx =$

$= f(0) - \left[\frac{(x-1)^2}{2} f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f''(x)\,dx =$

$= f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f''(x)\,dx$

Όμως $\frac{(x-1)^2}{2} \geq 0$ όταν $x \in [0,1]$ και f'' συνεχής

Άρα υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} f''(x)\,dx = f''(c) \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}\,dx =$

$$f''(c)\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}f''(c)$$

Άρα υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(c)$$

ΘΕΜΑ 199

Έστω $f,g:(\alpha,\infty)\to(0,\infty)$ με τις ιδιότητες f - συνεχής στο (α,∞), g - παραγωγίσιμη με g' συνεχή και $g'(x)>0$, για $x\geq\alpha$, $f(x)<g(x)$, για $x\geq\alpha$. Αποδείξτε ότι: $f(x)\leq g(\alpha)\,e^{\int_\alpha^x \frac{g'(t)}{f(t)}dt}$, $x\geq\alpha$

Λύση

g - γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\infty]$,

οπότε $0\leq\dfrac{g'(t)}{g(t)}\leq\dfrac{g'(t)}{f(t)}$, $t\geq\alpha$

Άρα $0\leq\displaystyle\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{g(t)}dx\leq\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt$ ή

$$\left[\ln g(t)\right]_\alpha^x\leq\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt$$

$$\ln g(x)-\ln g(\alpha)\leq\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt$$

$$\ln f(x)\leq\ln g(\alpha)+\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt$$

$$\ln f(x)\leq\ln g(\alpha)+\ln e^{\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt}$$

$$\ln f(x) \le \ln g(\alpha) \cdot e^{\int_{\alpha}^{x} \frac{g'(t)}{f(t)} dt}$$

$$f(x) \le g(\alpha) \cdot e^{\int_{\alpha}^{x} \frac{g'(t)}{f(t)} dt}$$

ΘΕΜΑ 200

Έστω $\mathbf{f,g:[\alpha,\beta]\to R}$, συνεχείς συναρτήσεις με $\mathbf{f(x),\ g(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{k>0}$, υπάρχει $\mathbf{\xi\in(\alpha,\beta)}$ μοναδικό, τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\xi} g(x)\,dx = k\int_{\xi}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\xi}^{\beta} g(x)\,dx$$

Λύση

Έστω $F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{t} g(x)\,dx$

$$G(t) = \int_{t}^{\beta} f(x)\,dx \int_{t}^{\beta} g(x)\,dx\ ,\quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$H(t) = F(t) - k\,G(t)\ ,\quad t\in[\alpha,\beta] \qquad H \text{ - συνεχής στο } [\alpha,\beta]$$

$$H(\alpha) = F(\alpha) - k\,G(\alpha) = -k\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx < 0$$

$$H(\beta) = F(\beta) - k\,G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx > 0$$

Άρα $H(\alpha)H(\beta)<0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $H(\xi)=0 \Leftrightarrow F(\xi) = kG(\xi)$

$$H'(t) = F'(t) - k\,G'(t) =$$

$$= f(t)\int_{\alpha}^{t} g(x)\,dx + g(t)\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx - k\left(-f(t)\int_{t}^{\beta} g(x)\,dx - g(t)\int_{t}^{\beta} f(x)\,dx\right)=$$

$$= f(t)\int_{\alpha}^{t} g(x)\,dx + k\,f(t)\int_{t}^{\beta} g(x)\,dx + g(t)\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx + k\,g(t)\int_{t}^{\beta} f(x)\,dx > 0$$

ΘΕΜΑ 201

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις **f, g** με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει: $\mathbf{f^2(x) + g^2(x) \le f(x) + g(x) - \frac{1}{2}}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

Λύση

Έχουμε $\quad f^2(x) + g^2(x) - f(x) - g(x) + \frac{1}{2} \le 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad f^2(x) - f(x) + \frac{1}{4} + g^2(x) - g(x) + \frac{1}{4} \le 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$

Άρα $\quad \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad$ και $\quad \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

που σημαίνει $\quad f(x) = \frac{1}{2} \quad$ και $\quad g(x) = \frac{1}{2}$

Επομένως $\quad f(x) = g(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

ΘΕΜΑ 202

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f:[1,+\infty)\rightarrow R$, παραγωγίσιμες, με f' συνεχή, που πληρούν τις συνθήκες:

(i) $xy\,f(x\,y) = xy\,(f(x)+1) + \int_1^{xy} f(t)\,dt - 1$, για κάθε $x\,,y \in [1,\infty)$

(ii) $f(2)=2$.

Λύση

Αν $x=1$ είναι $y\,f(y) = y\,f(1) + y + \int_1^{y} f(t)\,dt - 1$. Παραγωγίζουμε και έχουμε $f(y) + y\,f'(y) = f(1) + 1 + f(y) \;\Leftrightarrow\; y\,f'(y) = f(1)+1$

$\Leftrightarrow\; f'(y) = \dfrac{f(1)+1}{y} \;\Leftrightarrow\; f(y) = (f(1)+1)\ln y + c$

$f(2)=2 \;\Leftrightarrow\; (f(1)+1)\ln 2 + c = 2 \;\Leftrightarrow\; c = 2-(f(1)+1)\ln 2$

$f(y) = (f(1)+1)\ln y + 2 - (f(1)+1)\ln 2 = (f(1)+1)\ln\dfrac{y}{2} + 2$

ΘΕΜΑ 203

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\rightarrow R$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{\int_\alpha^\xi f(t)\,dt}{\int_\xi^\beta g(t)\,dt}$.

Λύση

Έστω $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $h(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\int_{x}^{\beta} g(t)\,dt$

$h(\alpha) = h(\beta) = 0$, οπότε βάσει του Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0$

$$h'(x)=f(x)\int_{x}^{\beta} g(t)\,dt-g(x)\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)\int_{\xi}^{\beta} g(t)\,dt=g(\xi)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\,dt}{\int_{\xi}^{\beta} g(t)\,dt}$$

ΘΕΜΑ 204

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ μια συνάρτηση συνεχής με $\mathbf{f(\alpha)>0}$ και $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)\,dt<0}$.

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(\xi)=0}$.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\eta\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε: $\int_{\alpha}^{\eta} \mathbf{f(t)\,dt=0}$.

(iii) Αν υποθέσουμε ότι το $\boldsymbol{\xi}$ είναι μοναδικό, αποδείξτε ότι $\boldsymbol{\xi<\eta}$.

Λύση

(i) Από το Θ.Μ.Τ. έχουμε $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = (\beta-\alpha)f(c)$ όπου $c \in (\alpha,\beta)$.

Άρα $(\beta-\alpha)f(c) < 0$, οπότε $f(c) < 0$.

Όμως $f(\alpha)f(c) < 0$, οπότε από το θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha,c)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$.

(ii) Έστω $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$

Επειδή $f(\alpha) > 0$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha,x_0)$. Τότε $g(x_0) > 0$ και $g(\beta) < 0$ οπότε υπάρχει $\eta \in (x_0,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\eta) = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\eta f(t)\,dt = 0$

(iii) Είναι $0 = \int_\alpha^\eta f(t)\,dt = (\eta-\alpha)f(\zeta)$, $\zeta \in (\alpha,\eta)$

Άρα $f(\zeta) = 0$ και επειδή ξ είναι μοναδικό είναι $\zeta=\xi$. Άρα $\xi<\eta$.

ΘΕΜΑ 205

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, τέτοια ώστε:

$$\int_x^{x+y} \varphi(t)\,dt = \int_{x-y}^{x} \varphi(t)\,dt\,, \quad \text{για κάθε } x,y \in \mathbf{R}\,.$$

Αποδείξτε ότι η φ είναι σταθερή.

Λύση

Έστω F μια αρχική της φ. Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$F(x+y) - F(x) = F(x) - F(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad F(x+y) + F(x-y) = 2F(x) \quad (1)$$

Θεωρούμε x σταθερό και παραγωγίζουμε την *(1)* και έχουμε

$\varphi(x+y)-\varphi(x-y)=0$ για κάθε $x,y\in R$

Για $x=y$ έχουμε $\varphi(2x)=\varphi(0)=$ σταθερά.

ΘΕΜΑ 206

(i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{-\alpha}^{\alpha} \eta\mu^3\left(\varepsilon\varphi\dfrac{x^{99}}{1+x^2}\right)dx$

(ii) Αν **f** είναι συνεχής και $\alpha, k\in R$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(k+x)-f(k-x)}{f(k+x)+f(k-x)}dx$$

Λύση

(i) Έστω $g(x)=\eta\mu^3\left(\varepsilon\varphi\dfrac{x^{99}}{1+x^2}\right)$

$$g(-x)=\eta\mu^3\left[\varepsilon\varphi\frac{(-x)^{99}}{1+x^2}\right]=\eta\mu^3\left[\varepsilon\varphi\left(-\frac{x^{99}}{1+x^2}\right)\right]=$$

$$=\eta\mu^3\left(-\varepsilon\varphi\frac{x^{99}}{1+x^2}\right)=\left(-\eta\mu\left(\varepsilon\varphi\frac{x^{99}}{1+x^2}\right)\right)^3=$$

$$=-\eta\mu^3\left(\varepsilon\varphi\frac{x^{99}}{1+x^2}\right)=-g(x)$$

Άρα η g είναι περιττή οπότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\eta\mu^3\left(\varepsilon\varphi\frac{x^{99}}{1+x^2}\right)dx=0$$

(ii) Έστω $\psi(x)=\dfrac{f(k+x)-f(k-x)}{f(k+x)+f(k-x)}$

$$\psi(-x)=\frac{f(k-x)-f(k+x)}{f(k-x)+f(k+x)}=-\frac{f(k+x)-f(k-x)}{f(k+x)+f(k-x)}=-\psi(x)$$

Άρα η ψ είναι περιττή, οπότε $I=0$.

ΘΕΜΑ 207

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I=\int_0^{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}} \eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu x\cdot \sigma\upsilon\nu 2x\ldots\sigma\upsilon\nu 2^{\nu-1}x\,dx\ ,\quad \nu\in N}$$

Λύση

Έχουμε $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\ldots\sigma\upsilon\nu 2^{\nu-1}x\,dx=\frac{\eta\mu 2^{\nu}x}{2^{\nu}}$

Άρα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}\frac{\eta\mu 2^{\nu}x}{2^{\nu}}dx$

Θέτουμε $2^{\nu}x = t$ οπότε $dx=\frac{dt}{2^{\nu}}$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu t\,dt}{2^{\nu}2^{\nu}}=\frac{1}{4^{\nu}}\int_0^{\pi/2}\eta\mu t\,dt=\frac{1}{4^{\nu}}\Big[-\sigma\upsilon\nu t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4^{\nu}}$$

ΘΕΜΑ 208

Αποδείξτε ότι: $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2^{\nu}}\right)}{2\nu}\le\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu^{\nu}x}{1+\eta\mu^{2\nu}x}dx$

Λύση

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ισχύει η σχέση $\eta\mu^{2\nu-1} x\, \sigma\upsilon\nu x \le \eta\mu^{\nu} x$, οπότε

$$\frac{\eta\mu^{2\nu-1} x\, \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^{2\nu} x} \le \frac{\eta\mu^{\nu} x}{1+\eta\mu^{2\nu} x}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu^{2\nu-1} x\, \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^{2\nu} x} dx \le \int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu^{\nu} x}{1+\eta\mu^{2\nu} x} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu^{2\nu-1} x\, \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^{2\nu} x} dx = \frac{1}{2\nu} \int_0^{\pi/4} (\ln(1+\eta\mu^{2\nu} x))'\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\nu}\Big[\ln(1+\eta\mu^{2\nu} x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2\nu} \ln\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\nu}\right) =$$

$$\frac{1}{2\nu} \ln\left(1+\frac{2^{\nu}}{2^{2\nu}}\right) = \frac{1}{2\nu} \ln\left(1+\frac{1}{2^{\nu}}\right)$$

Άρα $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu^{\nu} x}{1+\eta\mu^{2\nu} x} dx \ge \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{\nu}}\right)}{2\nu}$

ΘΕΜΑ 209

Χωρίς να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα αποδείξτε ότι:

$$\mathbf{0 \le \int_0^1 \ln\frac{e^x+1}{2}\, dx \le \frac{e+1}{2}}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x+1}{2}$, $x \in R$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{e^x+1}{2}\right)'}{\frac{e^x+1}{2}}=\frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{e^x+1}{2}}=\frac{e^x}{e^x+1}>0$$

οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο R. Άρα $f(0) < f(x) < f(1)$, για κάθε $x\in[0,1]$. Συνεπώς

$$\int_0^1 f(0)\,dx<\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 f(1)\,dx \iff$$

$$\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 \ln\frac{e+1}{2}\,dx \iff$$

$$0<\int_0^1 f(x)\,dx<\ln\frac{e+1}{2}$$

ΘΕΜΑ 210

Να συγκριθούν οι αριθμοί: $\mathbf{3\int_0^1 ημ(x^2)\,dx}$ και $\mathbf{\int_0^1 συν(x^2)\,dx}$.

Λύση

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $ημx\geq x-\frac{x^3}{6}$ όταν $x\geq 0$

Έστω $f(x)=ημx-x+\frac{x^3}{6}$

$$f'(x)=συνx-1+\frac{x^2}{2}$$

$$f''(x)=-ημx+x\ \geq 0 \quad \text{όταν} \quad x\geq 0$$

Άρα η f είναι αύξουσα στο $[0,\infty]$, οπότε $f'(x)\geq f'(0)=0$

Επειδή $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$, η f είναι αύξουσα στο $[0,\infty]$, οπότε $f(x)\geq f(0)=0$

Άρα $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$ (1) για κάθε $x \geq 0$

Έχουμε $\eta\mu(x^2) \geq x^2 - \frac{x^6}{6}$

οπότε $\int_0^1 \eta\mu(x^2)\,dx \geq \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right)dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \eta\mu(x^2)\,dx \geq \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 \Leftrightarrow 3\int_0^1 \eta\mu(x^2)\,dx \geq \frac{13}{14}$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu(x^2) = 1 - 2\eta\mu^2\left(\frac{x^2}{2}\right)$ και $\eta\mu^2\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48}$ (λόγω της *(1)*)

Άρα $\int_0^1 \sigma\upsilon\nu(x^2)\,dx \leq 1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48}\right)dx = 1 - \frac{55}{168} = \frac{113}{168} < \frac{13}{14}$

Άρα $3\int_0^1 \eta\mu(x^2)\,dx \geq \frac{13}{14} > \int_0^1 \sigma\upsilon\nu(x^2)\,dx$

ΘΕΜΑ 211

Έστω $\mathbf{f:[-1,1]\to R}$, μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$. Αν $|f''| \leq 1$ στο $[-1,1]$, αποδείξτε ότι:

$$\left|\int_{-1}^{1} (3x^2-1)\,f(x)\,dx\right| \leq \frac{4}{15}$$

Λύση

$$\left|\int_{-1}^{1} (3x^2-1)\,f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (x^3-x)'\,f(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\Big[(x^3-x)\,f(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^3-x)\,f'(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) f'(x)\,dx\right| = \left|-\left[\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) f'(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) f''(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{4}\,[f'(1)-f'(-1)] + \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) f''(x)\,dx\right|$$

Όμως επειδή η f΄ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο [-1,1], υπάρχει $\xi \in [-1,1]$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x) - f'(-1) = 2\,f''(\xi) \le 2$$

Άρα

$$\left|\int_{-1}^{1} (3x^2-1)\,f(x)\,dx\right| \le \left|\frac{1}{4}\,2 + \left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}\right| \le \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{20}-\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{-1}{20}-\frac{-1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{1}{6} + \frac{1}{20} - \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$$

ΘΕΜΑ 212

Αποδείξτε ότι: $\displaystyle \int_{x}^{x+1} \eta\mu y^3\,dy < \frac{6x+5}{3x^2}\ , \quad x>0$

Λύση

$$\int_{x}^{x+1} \eta\mu\, y^3\,dy = \int_{x}^{x+1} \frac{1}{3y^2}\,(-\sigma\upsilon\nu\, y^3)'\,dy =$$

$$= \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu\, y^3}{3y^2}\right]_{x}^{x+1} - \int_{x}^{x+1} (-\sigma\upsilon\nu\, y^3)\,\frac{-6y}{9y^4}\,dy =$$

$$= -\frac{\sigma\upsilon\nu\,(x+1)^3}{3\,(x+1)^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, x^3}{3x^2} - \frac{2}{3}\int_{x}^{x+1} \frac{\sigma\upsilon\nu y^3}{y^3}\,dy \le$$

$$\le \frac{1}{3\,(x+1)^2} + \frac{1}{3x^2} + \frac{2}{3}\int_{x}^{x+1} y^{-3}\,dy = \frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{1}{3x^2} + \frac{2}{3}\left[\frac{y^{-2}}{-2}\right]_{x}^{x+1} =$$

$$\frac{1}{3(x+1)^2}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{y^2}\right]_x^{x+1}=\frac{1}{3(x+1)^2}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right]=$$

$$\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^2}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x^2}=\frac{2}{3x^2}\leq\frac{6x+5}{3x^2}$$

ΘΕΜΑ 213

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I=\int_{-1}^{1}\frac{\eta\mu^3x\ln(x^6+x^4+x^2+1)}{(x^2+1)\,\sigma\upsilon\nu x}\,dx}$$

Λύση

Έστω $f:[-1,1]\to R$ με $f(x)=\dfrac{\eta\mu^3x\ln(x^6+x^4+x^2+1)}{(x^2+1)\,\sigma\upsilon\nu x}$

$$f(-x)=\frac{\eta\mu^3(-x)\ln[(-x)^6+(-x)^4+(-x)^2+1)}{[(-x)^2+1]\,\sigma\upsilon\nu(-x)}=$$

$$\frac{-\eta\mu^3x\ln(x^6+x^4+x^2+1)}{(x^2+1)\,\sigma\upsilon\nu x}=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή, οπότε $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$

ΘΕΜΑ 214

Αποδείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $\mathbf{\int_{-1}^{1}(2-e^{-x^2})\,dx\geq 2}$

(ii) $$\int_0^e \ln(1+x)\,dx \geq \int_0^e \frac{x}{1+x}\,dx$$

Λύση

(i) Έστω $f:[-1,1]\to R$, με $f(x)=2-e^{-x^2}$, $f'(x)=2x-e^{-x^2}$

x	-1		0		1
f΄(x)		-	0	+	
f(x)		↘	1	↗	

Έχουμε $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-1,1]$

οπότε $\int_{-1}^{1}(2-e^{-x^2})\,dx \geq \int_{-1}^{1} f(0)\,dx = 2$

(ii) Έστω $g:[0,e]\to R$, με $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}\geq 0$$

Άρα $g(x)\geq g(0)=0$ για κάθε $x\in[0,e]$

δηλαδή $\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\geq 0 \iff \ln(1+x)\geq\dfrac{x}{1+x}$

οπότε $\int_0^e \ln(1+x)\,dx \geq \int_0^e \dfrac{x}{1+x}\,dx$

ΘΕΜΑ 215

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

Λύση

Έστω $J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$ τότε

$$I+J=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I-J=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=-\Big[\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Big]_0^{\pi/2}=0$$

Άρα $I=J$ δηλαδή $I=\frac{\pi}{4}$

ΘΕΜΑ 216

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\mathbf{I_1=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}dx}$$

$$\mathbf{I_2=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}dx}$$

Λύση

$$I_1+I_2=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x+\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}dx=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$I_2=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}dx\overset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=}-\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}dy=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 y-\eta\mu y}{1-\eta\mu y-\sigma\upsilon\nu y}dy=I_1$$

Άρα $I_1=I_2$ και $I_1+I_2=\frac{\pi}{6}$ οπότε $2I_1=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow I_1=I_2=\frac{\pi}{12}$

ΘΕΜΑ 217

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\mathbf{x\,\varepsilon\varphi^2 x\,dx}$

Αποδείξτε ότι: $\mathbf{\ln 2\geq\frac{\pi(\alpha-\pi)}{8}}$

Λύση

$$\int_0^{\pi/4}x\,\varepsilon\varphi^2 x\,dx=\int_0^{\pi/4}x\,(\varepsilon\varphi x-x)'\,dx=$$

$$=\Big[x\,(\varepsilon\varphi x-x)\Big]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\varphi x-x)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x\,dx+\int_0^{\pi/4}x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\Big[\ln\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\pi/4}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{1}{2}=$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln 1 - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $\varepsilon\varphi x \leq 1$ οπότε $x\,\varepsilon\varphi^2 x \leq x$

Άρα $\int_0^{\pi/4} x\,\varepsilon\varphi^2 x\,dx \leq \int_0^{\pi/4} x\,dx = \frac{\pi^2}{32}$

Άρα $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\pi^2}{32} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16}$

$\Leftrightarrow \ln 2 \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{4\pi - \pi^2}{8} = \frac{\pi(4-\pi)}{8}$

ΘΕΜΑ 218

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\varepsilon\varphi x} e^{t^2}\,dt}{\int_1^{\sigma\varphi x} e^{t^2}\,dt}$

Λύση

Η συνάρτηση $f(t) = e^{t^2}$ είναι συνεχής, οπότε έχει αρχικές. Έστω F μια αρχική της f. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\varepsilon\varphi x} e^{t^2}\,dt}{\int_1^{\sigma\varphi x} e^{t^2}\,dt} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{F(\varepsilon\varphi x) - F(1)}{F(\sigma\varphi x) - F)1)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(F(\varepsilon\varphi x) - F(1))'}{(F(\sigma\varphi x) - F(1))'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\varepsilon\varphi x)'\,F'(\varepsilon\varphi x)}{(\sigma\varphi x)'\,F'(\sigma\varphi x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f'(\varepsilon\varphi x)(1+\varepsilon\varphi^2 x)}{f'(\sigma\varphi x)(-1-\sigma\varphi^2 x)} = \frac{e \cdot 2}{e \cdot (-2)} = -1$$

ΘΕΜΑ 219

Ποιο από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι μεγαλύτερο:

$$\int_0^{1/2} x^{\alpha} 2^x \, dx \quad \text{ή} \quad \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} \, dx, \quad \alpha > 1$$

Λύση

$x \cdot 2^x > 0$ και $x^{\alpha-1}$, $x \cdot 2^x$ είναι συνεχείς στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, οπότε υπάρχει $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{1/2} x^{\alpha} 2^x \, dx = 2^c c \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} \, dx$$

Η συνάρτηση $f: [0, \infty] \to R$ με $f(x) = x \cdot 2^x$ είναι γν. αύξουσα στο $[0, \infty]$ διότι $f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 > 0$

οπότε $2^c \cdot c < 2^{1/2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1/2} < 1$

Άρα $\int_0^{1/2} x^{\alpha} 2^x \, dx < \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} \, dx$

ΘΕΜΑ 220

Αν $\mathbf{1 \leq \alpha < \beta}$ αποδείξτε ότι: $\dfrac{\beta^{\nu} - \alpha^{\nu}}{\nu} = \dfrac{\beta^{\nu+1} - \alpha^{\nu+1}}{\nu+1}$ για κά

με $\nu \in N^*$

Λύση

Έστω $1 \le \alpha < x < \beta$. Τότε $x^{\nu-1} < x^{\nu}$, $\nu \in N^*$

οπότε $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu-1}\,dx < \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu}\,dx \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{x^{\nu}}{\nu}\right]_{\alpha}^{\beta} < \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta^{\nu}-\alpha^{\nu}}{\nu} < \frac{\beta^{\nu+1}-\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}$$

ΘΕΜΑ 221

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέτοια, ώστε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\mathbf{g:[\alpha,\beta]\to[f(\alpha),f(\beta)]}$ με $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(x)\,dx=0}$. Αποδείξτε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g^2(x)\,dx \le (\alpha-\beta)\,f(\alpha)\,f(\beta)}$

Λύση

f - γνησίως αύξουσα, οπότε $f(\alpha) \le g(x) \le f(\beta)$

Άρα $[g(x)-f(\alpha)]\,[g(x)-f(\beta)] \le 0 \Leftrightarrow$

$g^2(x) - [f(\alpha)+f(\beta)]\,g(x) + f(\alpha)\,f(\beta) \le 0 \Leftrightarrow$

$g^2(x) \le [f(\alpha)+f(\beta)]\,g(x) - f(\alpha)\,f(\beta)$

$\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} [f(\alpha)+f(\beta)]\,g(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha)\,f(\beta)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)\,dx \le [f(\alpha)+f(\beta)] \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx - f(\alpha)\,f(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} dx$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)\,dx \le -f(\alpha)\,f(\beta)\,(\beta-\alpha) = (\alpha-\beta)\,f(\alpha)\,f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 222

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$, μια συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx} = \frac{\pi}{4}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0 \in (0,1)}$, τέτοιο ώστε :

$$\frac{1}{1+x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$$

Λύση

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 0$$

οπότε βάσει του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = f(x_0) - \frac{1}{1+x_0^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$$

Όμως $\displaystyle \frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x_0^2} < \frac{1}{2x_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$

ΘΕΜΑ 223

Έστω $\mathbf{g}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και γν. αύξουσα στο (α,β). Να αποδείξετε ότι:

(i) $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{g(x)+g(\alpha+\beta-x)}{2}$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

(ii) $(\beta-\alpha)\, g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

Λύση

(i) Αν $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ισχύει η σχέση ως ισότητα.

Αν $x \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ τότε $(\alpha+\beta-x) \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha+\beta-x, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, x\right]$, άρα υπάρχουν

$\xi_1 \in \left[\alpha+\beta-x, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ώστε $g'(\xi_1)=\dfrac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha+\beta-x)}{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, x\right)$ ώστε $g'(\xi_2)=\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}$

επειδή $\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow g'(\xi_1)<g'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-g(\alpha+\beta-x)<g(x)-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{g(x)+g(\alpha+\beta-x)}{2}$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

(ii) Οι συναρτήσεις g(x), g(α+β-x) είναι συνεχείς στο [α,β], επομένως από τη σχέση (i) προκύπτει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(x)+g(\alpha+\beta-x)}{2}\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\beta-\alpha)\, g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\alpha+\beta-x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad (\beta-\alpha)\, g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

διότι $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(\alpha+\beta-x)\,dx$

ΘΕΜΑ 224

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi/2000} x\, f(\eta\mu x 2000x)\,dx = \frac{\pi}{4000}\int_0^{\pi/2000} f(\eta\mu 2000x)\,dx$$

Λύση

Θέτουμε $\pi\text{-}2000x = 2000t$

Για $x=0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{2000}$

Για $x=\dfrac{\pi}{2000} \Rightarrow t_2 = 0$

και $dx=-dt$. Άρα

$$\int_0^{\pi/2000} x\, f(\eta\mu\, 2000x)\,dx = \int_0^{\pi/2000} \frac{\pi-2000t}{2000}\, f(\eta\mu\,(\pi-2000t))\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2000}\int_0^{\pi/2000} f(\eta\mu\, 2000t)\,dt - \int_0^{\pi/2000} t\, f(\eta\mu\, 2000t)\,dt$$

Επομένως

$$\int_0^{\pi/2000} x\, f(\eta\mu\, 2000x)\,dx = \frac{\pi}{4000}\int_0^{\pi/2000} f(\eta\mu\, 2000x)\,dx$$

ΘΕΜΑ 225

Αν τα $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ είναι πολυώνυμα του x, δείξτε ότι η παράσταση

$$\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx \int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx - \int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx \int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx$$

έχει παράγοντα το $(x-1)^4$.

Λύση

Έστω ότι η παράσταση είναι:

$$f(x) = \int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx \int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx - \int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx \int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx$$

Το $f(x)$ είναι κι αυτό ένα πολυώνυμο του x, με

$$f'(x) = \alpha(x)\,\gamma(x) \int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx + \beta(x)\,\delta(x) \int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \alpha(x)\,\delta(x) \int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx - \beta(x)\,\gamma(x) \int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx$$

$$f''(x) = \alpha'(x)\,\gamma(x) \int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx + \alpha(x)\,\gamma'(x) \int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx +$$

$$+ \alpha(x)\,\gamma(x) \cdot \beta(x)\,\delta(x) + \beta'(x)\,\delta(x) \int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx +$$

$$+ \beta(x)\,\delta'(x) \int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx + \beta(x)\,\delta(x)\,\alpha(x)\,\gamma(x) -$$

$$- \alpha'(x)\,\delta(x) \int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx - \alpha(x)\,\delta'(x) \int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \alpha(x)\,\delta(x)\,\beta(x)\,\gamma(x) - \beta'(x)\,\gamma(x) \int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx -$$

$$- \beta(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx - \beta(x)\,\gamma(x)\,\alpha(x)\,\delta(x)$$

$$f''(x) = \alpha'(x)\,\gamma(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx + \alpha(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx +$$

$$+ \beta'(x)\,\delta(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx + \beta(x)\,\delta'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \alpha'(x)\,\delta(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx - \alpha(x)\,\delta'(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \beta'(x)\,\gamma(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx - \beta(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx$$

$$f'''(x) = \alpha''(x)\,\gamma(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx + \alpha'(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx +$$

$$+ \alpha'(x)\,\gamma(x)\,\delta(x)\,\beta(x) + \alpha'(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx +$$

$$+ \alpha(x)\,\gamma''(x)\int_1^x \beta(x)\,\delta(x)\,dx + \alpha(x)\,\gamma'(x)\,\beta(x)\,\delta(x) +$$

$$+ \beta''(x)\,\delta(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx + \beta'(x)\,\delta'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx +$$

$$+ \beta'(x)\,\delta(x)\,\alpha(x)\,\gamma(x) + \beta'(x)\,\delta'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx +$$

$$+ \beta(x)\,\delta''(x)\int_1^x \alpha(x)\,\gamma(x)\,dx + \beta(x)\,\delta'(x)\,\alpha(x)\,\gamma(x) -$$

$$- \alpha''(x)\,\delta(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x) - \alpha'(x)\,\delta'(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \alpha'(x)\,\delta(x)\,\beta(x)\,\gamma(x) - \alpha'(x)\,\delta'(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx -$$

$$- \alpha(x)\,\delta''(x)\int_1^x \beta(x)\,\gamma(x)\,dx - \alpha(x)\,\delta'(x)\,\beta(x)\,\gamma(x) -$$

$$- \beta''(x)\,\gamma(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx - \beta'(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx -$$

$$-\beta'(x)\,\gamma(x)\,\alpha(x)\,\delta(x)-\beta'(x)\,\gamma'(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx-$$

$$-\beta(x)\,\gamma''(x)\int_1^x \alpha(x)\,\delta(x)\,dx-\beta(x)\,\gamma'(x)\,\alpha(x)\,\delta(x)$$

Παρατηρούμε ότι: $f(1)=f'(1)=f''(1)=f^{(3)}(1)$, δηλαδή το $(x-1)^4$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

ΘΕΜΑ 226

Αν για γους $\nu\times\nu$ πίνακες A,B,Γ ισχύουν:

$$\begin{aligned} A+B+xAB&=0\\ B+\Gamma+xB\Gamma&=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*\\ \Gamma+A+x\Gamma A&=0 \end{aligned}$$

(i) Να αποδείξετε ότι $AB=B\Gamma=\Gamma A$

(ii) Έστω τα πολυώνυμα $f(x)=|xA+I|$, $g(x)=|xB+I|$ και $h(x)=|x\Gamma+I|$, $x\in\mathbb{R}^*$.

Αν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0\ ,\ \int_\beta^\gamma g(x)\,dx=0\ ,\ \int_\gamma^\delta h(x)\,dx=0$$

να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

Λύση

(i) Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} xAB&=-B-B\\ xB\Gamma&=-B-\Gamma\\ x\Gamma A&=-\Gamma-A \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x\Gamma AB&=-\Gamma B-\Gamma A\\ x\Gamma AB&=-AB-\Gamma B \end{aligned}\right\}\Rightarrow \Gamma B=\Gamma A \quad (1)$$

και

$$\left.\begin{aligned} xAB\Gamma&=-A\Gamma-AB\\ xAB\Gamma&=-A\Gamma-B\Gamma \end{aligned}\right\}\Rightarrow AB=B\Gamma \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $AB=B\Gamma=\Gamma A$

(ii) Επειδή

$$(x\Gamma+I)(xA+I)=x(\underbrace{x\Gamma A+\Gamma+A}_{0})+I=I$$

και

$$(xA+I)(xB+I)=x(\underbrace{xAB+A+B}_{0})+I=I$$

προκύπτει:

$$|xA+I|\neq 0\ ,\quad |xB+I|\neq 0\ ,\quad |x\Gamma+I|\neq 0$$

Για τα πολυώνυμα f(x), g(x), h(x) ισχύει το Θ. Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού, άρα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\,f(\xi_1)=0 \quad \text{όπου} \quad \alpha<\xi_2<\beta$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx=(\gamma-\beta)\,g(\xi_2)=0 \quad \text{όπου} \quad \beta<\xi_2<\gamma$$

και

$$\int_{\gamma}^{\delta} h(x)\,dx=(\delta-\gamma)\,h(\xi_3)=0 \quad \text{όπου} \quad \gamma<\xi_3<\delta$$

Αλλά $f(\xi_1)\neq 0$, $g(\xi_2)\neq 0$ και $h(\xi_3)\neq 0$

Επομένως $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

ΘΕΜΑ 227

Η συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι:

$$f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\beta-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}\,(f(\alpha)+f(\beta))$$

(Κ.Ε.Γ.Ε. Ιούνιος 1996, 1η δέσμη)

Λύση

Έχομε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = c\int_\alpha^\beta dx$$

επειδή

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$$

διότι αν θέσουμε $\alpha+\beta-x = t$ προκύπτει:

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

επομένως

$$2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = c\,(\beta-\alpha) \quad\Rightarrow\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = c\,\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Για $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ η αρχική γίνεται

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f\left(\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = c \quad\Rightarrow\quad 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = c$$

άρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\beta-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Για $x=\alpha$ η αρχική γίνεται

$$f(\alpha)+f(\beta) = c$$

άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{2}\,(f(\alpha)+f(\beta))$$

ΘΕΜΑ 228

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς **α, β** με **0<α<β**, τη συνεχή συνάρτηση **f: (0,+∞)→R** για την οποία

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 0$$

και τη συνάρτηση: $g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $x\in(0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύουν:

(α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **g** στο σημείο $(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον **x΄x**.

(β) $g(x_0) = 2+f(x_0)$

(Ιούνιος 1995)

Λύση

(α) Είναι η g παραγωγίσιμη στο [α,β] και

$$g(\alpha) = 2+\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2 \quad , \quad g(\beta) = 2+\frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 2$$

δηλαδή

$g(\alpha) = g(\beta)$ ώστε $g'(x_0) = 0$

που σημαίνει η εφαπτομένη στο $(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στον x΄x.

(β) Είναι:

$$x\,g(x) = 2x + \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad \text{άρα} \quad g(x) + x\,g'(x) = 2 + f(x)$$

συνεπώς

$$g(x_0) + x_0\,g'(x_0) = 2 + f(x_0) \;\Rightarrow\; g(x_0) = 2 + f(x_0)$$

ΘΕΜΑ 229

Έστω $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με $\mathbf{f(\beta)=f'(\beta)=0}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi \in (\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{2}(\xi-\alpha)^2 f''(\xi)$$

Λύση

Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση

$$h(x) = (x-\beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt - \frac{\beta-\alpha}{2}\int_{\alpha}^{x} (t-\alpha)^2 f''(t)\,dt$$

Έχουμε

$$h(\alpha) = (\alpha-\beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$$

$$h(\beta) = -\frac{\beta-\alpha}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)^2 f''(t)\,dt =$$

$$= -\frac{\beta-\alpha}{2}\Big[(t-\alpha)^2 f'(t)\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\beta-\alpha}{2}\int_{\alpha}^{\beta} 2(t-\alpha)\,f'(t)\,dt =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{2}\Big[2(t-\alpha)\,f(t)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\beta-\alpha}{2}\int_{\alpha}^{\beta} 2f(t)\,dt =$$

$$=-(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=\alpha-\beta)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

Άρα $h(\alpha)=h(\beta)$.

Σύμφωνα με το θ. Rolle Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0$

Επειδή $h'(x)=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2 f''(x)$

έχουμε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{2}(\xi-\alpha)^2 f''(\xi)$

ΘΕΜΑ 230

Έστω $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Αν $g'(x)>0$ και $\dfrac{g(x)}{g'(x)}g''(x)\leq g'(x)$ για κάθε $x\geq 0$ και $g'(0)=g(0)=1$, να αποδείξετε ότι $g(x)\leq e^x$ για κάθε $x\geq 0$.

Λύση

Έχουμε $\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\leq\dfrac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{g''(u)}{g'(u)}du\leq\int_0^x \frac{g'(u)}{g(u)}du \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^x (\ln g'(u))'\,du\leq\int_0^x (\ln g(u))'\,du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln g'(x)-\ln g'(0)\leq \ln g(x)-\ln g(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln g'(x)\leq \ln g(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}\leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt\leq\int_0^x dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x (\ln g(t))'\,dt\leq\int_0^x dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \left[\ln g(t)\right]_0^x \le \left[t\right]_0^x \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ln g(x) \le x \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g(x) \le e^x$

ΘΕΜΑ 231

Να βρεθεί η πραγματική συνάρτηση **$g:R\to R$**, με **g''** συνεχή και **$g'(0)=g(0)$** για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x e^u g''(u)\,du = 2000e^{2x} - e^x g(x) + \int_0^x e^u g(u)\,du \quad (1)$$

για κάθε **$x\in R$**.

Λύση

Για x=0 η δοθείσα σχέση δίνει $g(0)=g'(0)=2000$ (λόγω υπόθεσης) παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$e^x g''(x) = 4000e^{2x} - e^x g(x) - e^x g'(x) + e^x g(x) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad e^x g''(x) + e^x g'(x) = 4000e^{2x} \quad \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (g'(x) + g(x))' = (4000e^x)' \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g'(x) + g(x) = 4000e^x + c$

Για x=0 παίρνουμε c=0 οπότε

$e^x g'(x) + e^x g(x) = 4000e^{2x}$ ή

$(e^x g(x))' = (2000e^{2x})' \quad \Rightarrow \quad e^x g(x) \le 2000e^{2x} + c$

από όπου για x=0 παίρνουμε c=0, οπότε $g:R\to R$ με τύπο $g(x)=2000e^x$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^x e^u g''(u)\,du = 2000e^{2x} - e^x g(x) + \int_0^x e^u g(u)\,du \quad \text{για κάθε } x\in R$$

ΘΕΜΑ 232

Έστω $\mathbf{g:[1998,1999]\to R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[1998,1999]}$ με $\mathbf{g(1998)=0}$. Αν η $\mathbf{g}$ στρέφει τα κοίλα κάτω, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{1998}^{1999} x^{-1} g(x) \ge \frac{1}{2} g(1999) \quad \text{για κάθε} \quad x\ge 1998$$

Λύση

Εφαρμόζουμε το θ. Μ.Τ. στο [1998,x].

Υπάρχει $x_0\in(1998,x)$ τέτοιο ώστε

$g(x) - g(1998) = (x - 1998)\, g'(x_0)$ *(1)*

επειδή g΄ γνησίως φθίνουσα και $1998<x_0<x$ προκύπτει

$g'(1998)>g'(x_0)'g'(x)$

Η σχέση *(1)* γράφεται

$$g(x)>(x\text{-}1998)g'(x) \Rightarrow \frac{g(x)}{x} > \frac{x-1998}{x} g'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{1998}^{1999} x^{-1} g(x)\,dx \ge \int_{1998}^{1999} \frac{x-1998}{x} g'(x)\,dx$$

Επειδή $\dfrac{x-1998}{x} \ge \dfrac{1}{2}$ έχουμε

$$\int_{1998}^{1999} x^{-1} g(x)\,dx \ge \frac{1}{2}\int_{1998}^{1999} g'(x)\,dx = \frac{1}{2} g(1999)$$

Άρα $\displaystyle\int_{1998}^{1999} x^{-1} g(x)\,dx \ge \frac{1}{2} g(1999)$

ΘΕΜΑ 233

Υποθέτουμε ότι $0 \le \alpha < \beta \le c$. Δείξτε ότι:

$$\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < \frac{e^{c}-1}{2c}(\beta+\alpha)+1 \quad (1)$$

Λύση

Η παραπάνω ανισότητα *(1)* είναι ισοδύναμη με την

$$e^{\beta}-e^{\alpha} < \frac{e^{c}-1}{2c}(\beta^2-\alpha^2)+\beta-\alpha \quad ή$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx < \frac{e^{c}-1}{2c}(\beta^2-\alpha^2)+\beta-\alpha \quad ή$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx - \frac{e^{c}-1}{2c}(\beta^2-\alpha^2)-(\beta-\alpha) < 0$$

Έστω η συνάρτηση F, με τύπο

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} e^{t}\,dt - \frac{e^{c}-1}{2c}(x^2-\alpha^2)-(x-\alpha) \quad x\in[0,c]$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x)=e^{x}-2x\frac{e^{c}-1}{2c}-1 \quad και \quad F''(x)=e^{x}-\frac{e^{x}-1}{c} \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας το θ. Μ.Τ. για τη συνάρτηση $h(x)=e^{x}$ στο $[0,c]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,c)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x)=\frac{h(c)-h(0)}{c} \quad ή \quad e^{\xi}=\frac{e^{c}-1}{c} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις *(3)* και *(4)* έχουμε

$F''(x)=e^{x}-e^{\xi}$

Για $x\in(0,\xi)$ έχουμε $F''(x)<0$ και για $x\in(\xi,c)$ έχουμε $F''(x)>0$. Συνεπώς η συνάρτηση F είναι γν. φθίνουσα στο $[0,\xi]$ και γν. αύξουσα στο $[\xi,c]$, ενώ $F'(0)=F'(c)=0$. Για κάθε $x\in[0,c]$ είναι $F'(x)\le 0$, οπότε η συνάρτηση F είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $[0,c]$. Συνεπώς

$$F(\alpha)>F(\beta) \quad ή \quad 0>\int_{\alpha}^{\beta} e^x\,dx-\frac{e^c-1}{2c}(\beta^2-\alpha^2)-(\beta-\alpha)$$

οπότε αποδείχτηκε η σχέση *(1)*.

ΘΕΜΑ 234

Έστω **g** συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ την ευθεία $x=\alpha\geq 0$, είναι:

$$E(\alpha)=e^{\alpha}-g(\alpha) \text{ για κάθε } \alpha\geq 0 \text{ με } E(0)=0,$$

να βρείτε τον τύπο της **g** για κάθε $x\geq 0$.

Λύση

Είναι $E(\alpha)=e^{\alpha}-g(\alpha) \Leftrightarrow \int_0^{\alpha} g(x)\,dx=e^{\alpha}-g(\alpha)$

έχουμε $\left(\int_0^{\alpha} g(x)\,dx\right)'=\left(e^{\alpha}-g(\alpha)\right)' \Leftrightarrow g(\alpha)=e^{\alpha}-g'(\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(\alpha)+g(\alpha)=e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha}g'(\alpha)+e^{\alpha}g(\alpha)=e^{2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{\alpha}g(\alpha))'=\frac{1}{2}(e^{2\alpha})'$

Άρα $e^{\alpha}(g(\alpha)=\frac{1}{2}e^{2\alpha}+c$, $c\in R$ και $\alpha\geq 0$.

Για $\alpha=0$ $g(0)=\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow 1-E(0)=\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$

Επομένως $g(\alpha)=\dfrac{e^{2\alpha}+1}{2e^{\alpha}}$, $\alpha\geq 0$.

Διαφορετικά

$$g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}, \quad x\geq 0$$

ΘΕΜΑ 235

Στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, έστω η συνάρτηση f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση: $0<f'(t)\leq 1$ με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι: $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \geq \int_0^1 (f(t))^3\,dt$

(Putnam Exam. 1973)

Λύση

Έστω $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2-\int_0^x (f(t))^3\,dt$ για κάθε $0\leq 1\leq 1$

Έχουμε $F(0)=0$ και

$$F'(x)=2\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)f(x)-(f(x))^2=f(x)\left(2\int_0^x f(t)\,dt-(f(x))^2\right)$$

Θεωρούμε $G(x)=2\int_0^x f(t)\,dt-(f(x))^2$ για κάθε $0\leq x\leq 1$

Οπότε $G(0)=0$ και

$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))\geq 0$

(διότι $f(x)\geq 0$ και $1-f'(x)\geq 0$ από υπόθεση).

Άρα η $G(x)$ είναι αύξουσα για $x\geq 0$.

Επειδή $x\geq 0 \;\Rightarrow\; G(x)\geq G(0)=0$

Επομένως και η $F(x)$ είναι αύξουσα για κάθε $x\geq 0$ δηλαδή

$F(x)\geq F(0)=0$

Άρα $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 \geq \int_0^x (f(t))^3\,dt$ για κάθε $0\leq x\leq 1$.

ΘΕΜΑ 236

Να αποδείξετε ότι: $$\int_0^{\pi} \frac{x\,\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx$$

Λύση

Έστω $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x\,\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx$, $I_2 = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx$

Θέτουμε $y=\pi-x$ οπότε

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-y)\,\eta\mu y}{1+\eta\mu^2 y}\,dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu y}{1+\eta\mu^2 y}\,dy - I_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; 2I_1 = I_2 + \pi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\eta\mu y}{1+\eta\mu^2 y}\,dy =$$

$$= I_2 + \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx = 2I_2$$

Άρα $I_1 = I_2$.

ΘΕΜΑ 237

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση **f** για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = f(x) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(Ιούνιος 1996)

Λύση

Επειδή το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = c$

έχουμε $\left(\int_0^1 e^{1-x} f(x)\, dx\right)' = (f(x) + e^x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = f'(x) + e^x \Rightarrow f'(x)' = (-e^x)' \Rightarrow f(x) = -e^x + c$ όπου $c \in R$.

Άρα η αρχική δίνει $\int_0^1 e^{1-x}(-e^x + c)\, dx = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -e\int_0^1 dx - c\int_0^1 e^{1-x}(1-x)'dx = c \Leftrightarrow$

$-e - c\left[e^{1-x}\right]_0^1 = c \Leftrightarrow -e - c(1-e) = c \Leftrightarrow c = \dfrac{e}{e-2}$

Άρα $f(x) = e^x + \dfrac{e}{e-2}$ για κάθε $x \in R$.

ΘΕΜΑ 238

Αν η συνάρτηση **g** είναι συνεχής στο διάστημα **[1998,1999]**, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1998,1999)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\int_{1998}^{x_0} g(x)\, dx + \int_{1999}^{x_0} g(x)\, dx = 3 \cdot 997 - 2x_0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_{1998}^{x} g(t)\, dt + \int_{199}^{x} g(t)\, dt - 3.997 + 2x$

η οποία είναι συνεχής στο [1998,1999] και ισχύει

$h(1998) = \int_{1999}^{19998} g(x)\, dx - 1$ και $h(1999) = \int_{1998}^{1999} g(x)\, dx + 1 = -g(1998)$

Άρα $h(1998)\, h(1999) = -g^2(1998) < 0$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1998,1999)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$, που σημαίνει

$$\int_{1998}^{x_0} g(t)\,dt+\int_{1999}^{x_0} g(t)\,dt-3.997+2x_0=0 \iff$$

$$\iff \int_{1998}^{x_0} g(t)\,dt+\int_{199}^{x_0} g(t)\,dt=3.997-2x_0$$

ΘΕΜΑ 239

Έστω η συνάρτηση **f:R→R**, ώστε:

$$\mathbf{f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)} \quad (1)$$

(i) Να δειχθεί ότι **f** είναι περιττή.

(ii) Αποδείξτε ότι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)\,dx=0}$ για κάθε $\boldsymbol{\alpha\in R}$

Λύση

(i) Η (1) για x=y=0 δίνει $f^2(0)=f^2(0)-f^2(0)$ ή $f^2(0)=0$ ή $f(0)=0$

Για y→-x η *(1)* δίνει

$f(0)f(2x)=f^2(x)-f^2(-x)$ ή $f^2(x)=f^2(-x)$ ή

$f(x)=f(-x)$ ή $f(-x)=-f(x)$

Αν $f(x)=f(-x)$ (2) τότε

Η *(1)* για x→0 και y→x δίνει

$f(0+x)f(0-x)=f^2(0)-f^2(x)$ ή

$f(x)f(-x)=f^2(0)-f^2(x)$

και λόγω της *(2)* $f^2(0)=2f^2(x)$ ή $2f^2(x)=0$ ή $f(x)=0$

οπότε $f(x)=f(-x)=-f(x)=0$

Άρα σε κάθε περίπτωση για κάθε x,-x∈R , ισχύει

$f(-x)=-f(x)$

δηλαδή η f είναι περιττή στο R.

(ii) Επειδή $f(-x)=-f(x)$ έχουμε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

ΘΕΜΑ 240

Υποθέτουμε ότι η **f** είναι μία συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{1998}}{1998} + \frac{x^{2000}}{2000} + C$$

όπου **C** είναι μία σταθερά. Να βρείτε τον τύπο της **f(x)** καθώς και την τιμή της σταθεράς **C**.

Λύση

Έχουμε $f(x) = -x^2 f(x) + x^{1997} + x^{1999} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) + x^2 f(x) = x^{1997} + x^{1999} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + x^2) f(x) = x^{1997} + x^{1999} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^{1997} + x^{1999}}{1 + x^2} = \dfrac{x^{1997}(1 + x^2)}{1 + x^2} = x^{1997}$

Για $x = 1$ η αρχική γίνεται

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{1998} + \frac{1}{2000} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^{1997}\,dx = \frac{1}{1998} + \frac{1}{2000} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{1998} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{1998} = -\frac{1}{2000}$$

ΘΕΜΑ 241

Έστω η συνάρτη $\mathbf{f:(0,\infty)\to R}$ με $\mathbf{f(x)=x\text{-}e\ln x}$

(i) Να παρασταθεί γραφικά η **f**.

(ii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της **f**, του άξονα **Ox** και τις ευθείες $\mathbf{x=1}$, $\mathbf{x=e}$.

(iii) Να δειχθεί ότι $\pi^e<e^\pi$.

Λύση

(i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x-e\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{x}{e} \Leftrightarrow x=e$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(e,0).
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$

$f'(x)=1-\frac{e}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0$ αν $x\in(e,\infty)$ και $f'(x)<0$ αν $x\in(0,e)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (e,∞) και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e)$.

$f''(x)=\frac{e}{x^2}$

Η εξίσωση $f''(x)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\infty)$

Άρα η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,\infty)$
Επειδή $f'(e)=0$ και $f''(e)>0$ προκύπτει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x=e, το f(e)=0

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-e\ln x)=\lim_{x\to\infty} x\left(1-e\frac{\ln x}{x}\right)=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-e\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-e\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)=+\infty$$

Άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-e\dfrac{\ln x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-e\frac{\ln x}{x}\right)=1$$

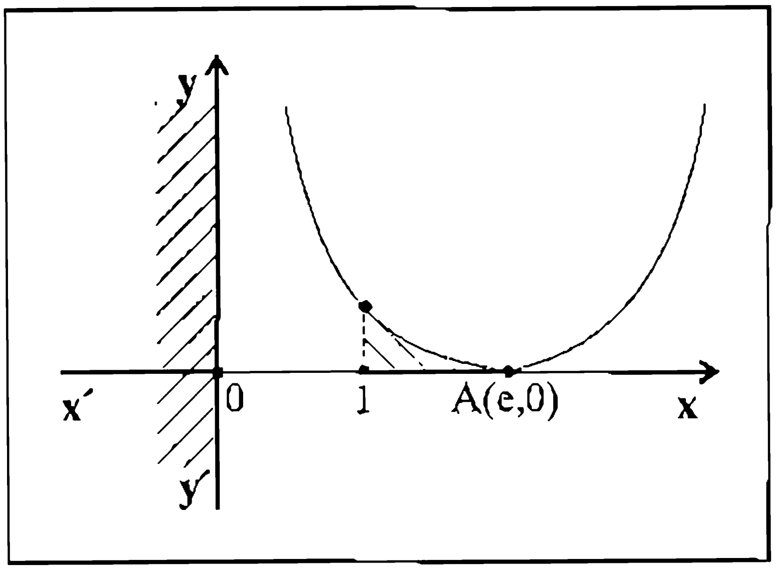
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}(x-e\ln x-x)=-e\lim_{x\to\infty}(\ln x)=-\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-e\ln x)=+\infty$$

Συνεπώς η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

x	0		e		+∞
f′(x)		- - - - - - - - -	0	- - - - - - - -	
f″(x)		+ + + + + + + +		+ + + + + + + +	
f(x)	+∞	↘	0 ε	↗	+∞



ii) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^e f(x)\,dx\ ,\ f(x)\geq 0\quad \text{για κάθε } x\in[1,e]$$

$$E=\int_1^e (x-e\ln x)\,dx=\int_1^e x\,dx-e\int_1^e \ln x\,dx$$

$$\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e x'\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx=e\ln e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)=1$$

Άρα $E=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-e=\frac{e^2-2e-1}{2}$

(iii) Επειδή $e<\pi$ και η f είναι γν. αύξουσα στο (e,∞) προκύπτει ότι $f(e)<f(\pi)$

δηλαδή

$$0<\pi-e\ln\pi \Leftrightarrow e\ln\pi<\pi \Leftrightarrow \ln\pi^e<\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\pi^e<\ln e^\pi \Leftrightarrow \pi^e<e^\pi$$

ΘΕΜΑ 242

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$ με $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

(i) Να παρασταθεί γραφικά η **f**.

(ii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της **f** τον άξονα **Ox** και τις ευθείες **x=-1**, **x=1**.

(iii) Να βρεθεί το μήκος της γραφικής παράστασης της **f**.

Λύση

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right),\ x\in[-1,1]$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

$f(0)=\frac{1}{2}(1+1)=1$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(0,1).
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [-1,1].
Η f είναι άρτια, διότι για κάθε $x\in[-1,1] \Rightarrow -x\in[-1,1]$ και

$f(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^{x}\right)=f(x)$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}=e^{-x} \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0$, αν $x\in(0,1]$ και

$f'(x)<0$, αν $x\in[-1,0)$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] και γνησίως φθίνουσα στο [-1,0).

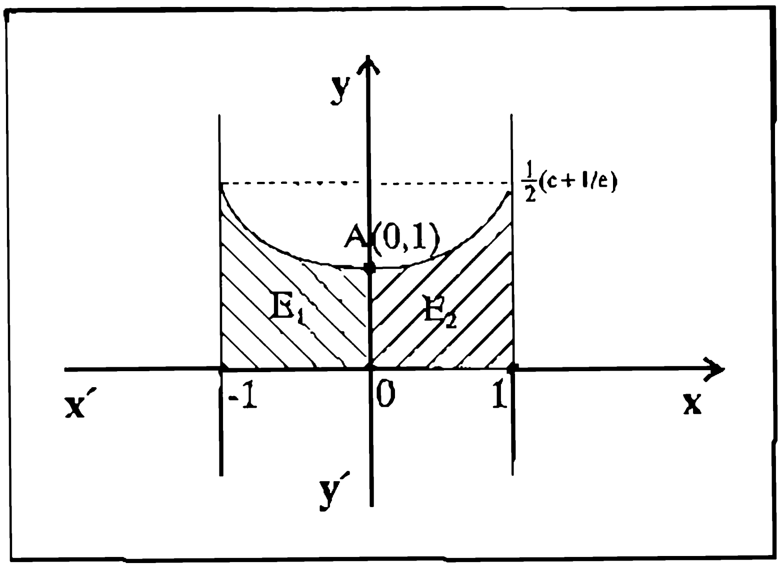
$f''(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$

Άρα η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα [-1,1].
Επειδή $f'(0)=0$ και $f''(0)>0$, προκύπτει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=1$.
Ασύμπτωτες δεν υπάρχουν.

$f(-1)=\frac{1}{2}\left(e^{-1}+e\right)=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$

$f(1)=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$

x	-1		0		1
$f'(x)$		- - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +	
$f''(x)$		+ + + + + + + +		+ + + + + + + + +	
$f(x)$	$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$	↘	1	↗	$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$



Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = E_1 + E_2 = 2E_2$

$$E = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= \Big[e^x\Big]_0^1 - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 = (e-1) - (e^{-1} - e^0) = e - \frac{1}{e}$$

$$E = e - e^{-1}$$

(iii) $L(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]^2}\,dx =$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\Big[e^{-x}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) - \frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) =$$

$$= \frac{1}{2}(e - e^{-1} - e^{-1} + e) = \frac{2\left(e - \frac{1}{e}\right)}{2} = e - \frac{1}{e}$$

Άρα $L(f) = e - \frac{1}{e}$

• Προτεινόμενες ασκήσεις

1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx \qquad I_2 = \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$$

$$I_3 = \int x^x (1 + \ln x)\, dx \qquad I_4 = \int \varepsilon\varphi^2 x\, dx$$

$$I_5 = \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx \qquad I_6 = \int \frac{dx}{1 + \eta\mu x}$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \qquad I_8 = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$I_9 = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{\eta\mu x + 1} dx \qquad I_{10} = \int \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\, \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}\, dx$$

$$I_{11} = \int \eta\mu^4 x\, \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx \qquad I_{12} = \int x \ln(x^2 - 1)\, dx$$

$$I_{13} = \int e^{-x} \eta\mu x dx \qquad I_{14} = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$I_{15} = \int \frac{dx}{\eta\mu(x + \alpha)\, \eta\mu(x + \beta)} \qquad I_{16} = \int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$$

2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{ημ^2x\, συν^2x} \qquad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1 - e^{ημx}}{1 + e^{ημx}}\, dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{g(x) - g''(x)}{e^x}\, dx \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{ημx - συνx}{\sqrt[3]{ημx} + \sqrt[3]{συνx}}\, dx$$

3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{ημ^2 x\, συνx} \cdot \frac{1}{συν^2x}\, dx$$

$$I_2 = \int \frac{e^{x+1998} + e^{x+1998}ημx}{e^{1998} + e^{1998}συνx}\, dx$$

$$I_3 = \text{in} \; \frac{1}{\sqrt{εφx}} \frac{1}{συν^2x}\, dx$$

4

Αν $I_ν = \int εφ^{2ν} x\, dx$, να αποδείξετε ότι

$$I_ν = \frac{εφ^{2ν-1} x}{2ν - 1} - I_{ν-1} \text{ για κάθε } ν \in N^*.$$

5

Αν $\mathbf{I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^{2\nu} x\, dx}$, $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{I_\nu = \frac{1}{2\nu - 1} - I_{\nu-1}}$$

6

Έστω $\mathbf{g:(0,\pi)\to R}$ με $\mathbf{g(x) = \ln(1+\eta\mu^2 x)}$

(i) Να μελετηθεί η $\mathbf{g}$ ως προς τη μονοτονία.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu\frac{x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\,\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx}$$

7

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx}$

8

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I = \int_0^{1} x\ln(1+x)\,dx}$

9

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_1^3 \frac{dx}{|x-\alpha|+1}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(x)$.

10

(i) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2-16)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^x}{(e^x+1)(x^2-16)} \text{ για } 0<\alpha<4$$

(ii) Να υπολογιστε το ολοκλήρωμα: $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2-16)}$

11

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I_1=\int_1^{1998} \frac{e^x-1998}{x e^x+1998} dx$

$I_2=\int_0^1 \frac{dx}{1998+\sqrt{x}}$ $\quad I_3=\int_0^{1998} \frac{\ln x}{\ln x+\ln(1998-x)}$

12

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\int_x^{1998} g(t)\, dt \leq x^{3996} \text{ για κάθε } x>0.$$

Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$.

13

Να αποδείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{\nu} x\, dx = \frac{\nu-1}{\nu}\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{\nu-2} x\, dx \ , \nu \in N^*$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(2\,\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu}{2}-m\right)x\, dx = \pi\binom{\nu}{m} \ , \ \nu, m \in N^*$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu(2k+1)\,\theta}{\eta\mu\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2} \ , \ k=0,1,2...$

14

Να αποδείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\frac{1}{2(\nu+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^{\nu}}{1+x^2}\, dx \leq \frac{1}{\nu+1} \ , \ \nu \in N^*$

(ii) $\displaystyle\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha} < \int_\alpha^\beta \ln(x+1)\, dx - \int_\alpha^\beta \ln x\, dx < \ln\frac{\beta}{\alpha} \ , \ 0<\alpha<\beta$

15

Για $1<\alpha\leq\beta$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{1}{e}(e^{\beta}-e^{\alpha})\leq\int_{\alpha}^{\beta}x^{x}\,dx\leq(e^{\beta}-e^{\alpha})\,e^{\beta^2-\alpha-\beta}$

(ii) $0\leq\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\ln x}-\ln\frac{\beta-1}{\alpha-1}\leq\beta-\alpha$

16

Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=\frac{x-4\eta\mu x}{e^x}$. Να υπολογίσετε:

(i) $L_1=\lim_{x\to+\infty}f(x)$

(ii) $L_2=\lim_{x\to+\infty}f'(x)$

(iii) $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

17

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μία συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I} = \int_2^3 \frac{f''(x)}{f'(x)}\,dx$

18

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και αύξουσα. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1998}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\eta\mu x\,dx \geq 0$

19

Έστω $\mathbf{g:R\to R}$ μία πραγματική συνάρτηση, συνεχής ώστε:

$g(x) = 1998x + \int_0^x g\,(x-u)\,\eta\mu u\,du$. Να βρεθεί ο τύπος της $\mathbf{g}$.

20

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in [0,\pi]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\int_0^{\pi} (x+\pi)\,\eta\mu x\,dx = 2\pi\int_{x_0}^{\pi} \eta\mu x\,dx$

21

Να αποδείξετε ότι: $2 \leq e^2\nu^2 \int_{1/\nu}^{2/\nu} x\,e^{-\nu x}\,dx \leq e$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$.

(Ιούνιος 1993)

22

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-t} f(t)\, dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x)$$

(Ιούνιος 1993)

23

Αν g είναι μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{\alpha} (g(x) + g(-x))\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\, dx$$

24

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{1} (f^2(x) + 2f(x)\, e^x)\, dx \geq \frac{1 - e^2}{2}$$

25

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{x}^{1+x} e^{1/x} e^{u}\, du$

+∞

26

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν: $f'(0)=1,\ f(0)=1995$ και

$$1+\int_0^x f''(x)\,\sigma\upsilon\nu t\,dt=\sigma\upsilon\nu^2 x+\int_0^x f'(x)\,\eta\mu(t)\,dt$$

(Ιούνιος 1995)

27

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_\alpha^\beta f(x-t)\,dt\ ,\ x\in R \text{ με } \alpha,\beta\in R$$

είναι παραγωγίσιμη και ότι, αν υπάρχει $x_0\in R$ με $F'(x_0)=0$ τότε $F(x)=0$, για κάθε $x\in R$.

(Ιούνιος 1995)

28

Έστω $g:(0,+\infty)\to R$ συνάρτηση συνεχής για την οποία ισχύει:

$$\int_{1998}^{2000} g(xt)\,dt\geq\int_{1998}^{2000} g(t)\,dt \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{1998}^{2000} g(t)\,dt = 2000g(2000) - g(1998)$

29

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g}$, συνεχής στο $\mathbf{R}$ και

$$f(x) = \int_{0}^{x} (x - t)\, g(t)\, dt$$

Αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τα κοίλα, όταν $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

(Ιούνιος 1996)

30

Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx\right| \leq \beta - \alpha$ για κάθε $\beta > \alpha > 0$.

31

Δίνεται $\displaystyle I_\nu = \int_{0}^{\pi/2} \eta\mu^\nu x\, dx$, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα I_ν, $I_{\nu-1}$, $\nu \in \mathbf{N}^*$ και να υπολογίσετε το I_3.

32

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ που πληρούν

τη σχέση $\eta\mu\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{x}{x+1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

33

Αν η πραγματική συνάρτηση **g** είναι συνεχής στο διάστημα $[-1998, 1998]$ και για κάθε $x \in [-1998, 1998]$ ισχύει:

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + x^2y^2$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1998}^{1998} g(x)\,dx$

34

Αν η πραγματική συνάρτηση **g** ειναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$ και $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε να ισχύει $g'(x_0)\eta\mu x_0 + 1 = 0$.

35

Έστω **g** μία πραγματική και συνεχής συνάρτηση στο $[1,4]$. Αν ισχύει $\int_1^3 g(x)\,dx = \int_2^4 g(x)\,dx$, να αποδείξετε ότι η **g** έχει ένα

τουλάχιστο κρίσιμο σημείο.

36

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to R$ με $\alpha<\beta$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $g''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx \neq (\beta-\alpha)\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

37

Υποθέτουμε ότι $g:[\alpha,\beta]\to R$ είναι συνεχής και $g:[\alpha,\beta]\to R$ είναι φθίνουσα με $f(x)\geq 0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$ έτσι ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx = g(\alpha)\int_\alpha^\xi f(x)\,dx$$

38

Έστω $g:R\to R$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με g' γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$. Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in R$, να αποδείξετε ότι για κάθε $k\in R$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,dx < \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 g(k) + \frac{1}{4}\int_{2\alpha-k}^{2\beta-k} g(x)\,dx$$

39

Αν η πραγματική συνάρτηση **g** έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0,\pi]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ ώστε:

$$g(x)\,\sigma\upsilon\nu x_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g'(x)\,\eta\mu x = 0$$

40

Να αποδείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\int_1^{1999} e^x(2x+1)\,dx > 1998$

(ii) $\displaystyle\int_1^{e}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)dx > \int_1^{e}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx$

41

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,g(x)\,dx \le \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

42

Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\eta\mu 2t)^{1/t}\,dt$

43

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu(ux)}{u+x}\,du$

44

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x}{x^2} + e$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

(ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^{x+2} f(t)\,dt$

45

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = c \text{ , όπου } c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(i) η f' είναι περιττή

(ii) $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$

46

Έστω g μία πραγματική συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[-1998, 1998]$. Αν η g στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[-1998,1998]$, να αποδείξετε ότι:

(i) $g(x) \leq (x+1998)\, g'(1998) + g(-1998)$

(ii) $\dfrac{1}{1998}\displaystyle\int_{-1998}^{1998} g(x)\, dx \leq 2g(-1998) + 1998\, g'(1998)$

47

Αν η συνάρτηση $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g'(x) + \int_{0}^{x} g(u)\, du \quad \text{για κάθε } g\in \mathbf{R},$$

να αποδείξετε ότι:

(i) Οι συναρτήσεις $f(x)=(g(x)-g'(x))e^{x}$ και $\Phi(x)=(g(x)+g'(x))e^{-x}$ για κάθε $x\in \mathbf{R}$ είναι σταθερές.

(ii) Αν $g(0)=2000$ τότε $g(x)=1000(e^{x}+e^{-x})$, $x\in \mathbf{R}$

48

Έστω g συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $2\xi g(\xi^{2})=g(\xi)$.

49

Αν η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ και η συνάρτηση $\mathbf{f'}$ είναι φθίνουσα στο $[-\alpha,\alpha]$, να αποδείξετε ότι:

(i) $f(x)\geq(x+\alpha)f'(\alpha)+f(-\alpha)$

(ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx\geq 2\alpha f(-\alpha)+2\alpha^2 f'(\alpha)$

50

Έστω $\mathbf{f}$ μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $\int_{x}^{y} f(t)\,dt=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f''(t)+f'(t)=0$ για κάθε $t\in\mathbf{R}$.

51

Αν η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και η $\mathbf{g'}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$g(x)>g(1998)+xg'(x)-1998g'(x)$ για κάθε $x\neq 1998$.

52

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x(\sqrt{t}+\eta\mu 4t)\,dt$

53

Έστω $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με f συνεχής και ισχύουν

(i) $f(x)=\int_0^x e^{u-f(u)}\,du$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

(ii) $g(x)\beta x$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

(iii) $g(x+y)\beta g(x)+g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$.

Να αποδείξετε ότι: $f(x)=g(x)=x,\ x\in\mathbf{R}$

54

Έστω η πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,c]\,(\alpha<c)$ και $g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$, $g(c)=c$ για $0<\alpha<\beta<c$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,c)$ ώστε $\xi_1 g'(\xi_1)=g(\xi_1)$ και $\xi_2 g'(\xi_2)=g(\xi_2)$

(ii) $\int_{\xi_1}^{\xi_2} t\,g''(t)\,dt=0$

55

Έστω $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία πραγματική συνάρτηση με τύπο: $g(x)=\int_{1998}^{1999}\frac{\eta\mu(xt)}{t}\,dt$. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

56

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $g'(0)=g(0)=2000$ για την οποία ισχύει:

$$g'(x)g''(x)-g^2(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος της g.

57

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=0 \text{ για κάθε } \alpha\in\mathbb{R}$$

(i) Να βρεθεί ο τύπος της πραγματικής συνάρτησης g, που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(e^x+1)g'(x)-e^x g(x)=e^{2x}+g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ με } g(0)=\ln 2$$

(ii) Σημείο A κινείται στο θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα $\upsilon=2$ m/sec και η θέση του πάνω στον ημιάξονα δίνεται από το $f(t)=\upsilon t$, $t\in[0,1]$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=f(t)$.

(iii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή $t=\frac{1}{2}$ sec.

58

Αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{1-t}^{t} f(x)\, g(1-x)\, dx = \int_{1-t}^{t} f(1-x)\, g(x)\, dx$$

59

Αν η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει: $\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{1999}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0[0,1]$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0) = x_0^{1998}$.

60

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{g}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R^*}$ για την οποία ισχύουν:

(i) $x g'(x) + e^{1/x} = g(x)$ για κάθε $x \neq 0$

(ii) $g(1) = e$

(α) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $\mathbf{g}$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^{1998} x^{-1} g(x)\, dx$

61

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, που είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $\mathbf{f(x+y)=f(x)+f(y)}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathbf{f(0)=0}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)\,dx=0}$ για κάθε $\alpha\in \mathbf{R}$.

62

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{[0,1]}$ με $\mathbf{f(x)\leq 0}$ και $\mathbf{g(x)\geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in [0,1]}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in [0,1]}$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{x_0} \mathbf{f(u)\,du}=\int_1^{x_0}\mathbf{g(u)\,du}.$$

63

Δίνεται πίνακας $\mathbf{A}$ $\mathbf{\nu\times\nu}$ με $\mathbf{A^2+A+I=0}$ και $\boldsymbol{\nu}$ περιττός. Αν

$$g(x)=\int_0^x \left|A^{-1}+tI\right|\,dt\ ,x\in R,$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in (0,1)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{g'(x_0)=0}$.

64

Να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^e x^{-1} g(1+\ln x)\,dx$

65

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [-\pi, \pi]$ τέτοια, ώστε:

$$2\pi e^x \sigma\upsilon\nu x + 2\pi e^y \sigma\upsilon\nu y = e^{-\pi} - e^{\pi}$$

66

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και g' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta g(u)\,du > (\beta-\alpha)\,g(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 g'(\alpha)$$

67

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) + f(-x) = 1$ για κάθε $x \in R$. Αν ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ έχει ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα, να βρεθεί η πιθανότητα ώστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 4 \text{ όπου } \alpha \in \Omega$$

68

Έστω $\mathbf{g}$ μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbf{R}$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x (x-u)\, g(u)\, du \geq \int_0^x g(u)\, du \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Να βρείτε τον τύπο της πραγματικής συνάρτησης $\mathbf{g}$.

69

Έστω $\mathbf{f: R \to R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει $\mathbf{f'(x) > 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)\, dt \ , x \in R$$

με $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ πραγματικούς αριθμούς είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\mathbf{x_0 \in R}$ με $\mathbf{F'(x_0) = 0}$, τότε $\mathbf{F(x) = 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$.

(Γενικές 1995)

70

Έστω η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{f}$, συνεχής στο $\mathbf{[-1,1]}$ με $\mathbf{f(x) > 0}$, για την οποία ισχύει: $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ για κάθε $\mathbf{x \in [-1,1]}$. Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{1998x}}{f(x)+1}\, dx = \frac{1}{1999}$

71

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με $g(0)=2000$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0}\int_{1998}^{2000} g(xu)\,du$

72

Έστω η πραγματική συνάρτηση g είναι "ένα προς ένα" στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $g(x+g(y))=g(x+y)+1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

(i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g

(ii) Αν η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

73

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f,g,h με πεδίο ορισμού τα $[\alpha,\beta]$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)+0{,}75\le f(x)+g(x)+h(x)$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\int_\alpha^\beta h(x)\,dx$$

74

Αν η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(x) \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\eta\mu x \leq \frac{\pi^2}{4}$$

75

Αν η πραγματική συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1998,1999]$ και ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [1998,1999]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{1998}^{1999} g(x)\,dx \int_{1998}^{1999} \frac{dx}{g(x)} \geq 1$.

76

Έστω $f: R \to R$ συνεχής, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 2\int_0^1 e^x f(x)\,dx + \frac{1}{2}(1 - e^2)$$

77

Έστω $f: R \to R$ συνεχής, να αποδείξετε ότι:

$\int_0^1 (e^{2x}$ [redacted] $- 2)\, f(x)\,dx \geq \frac{1}{e^2} - 1$

78

Αν f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, ισχύει

$$f(x)+f(\alpha+\beta-x)=g(x)+g(\alpha+\beta-x)$$

να αποδείξετε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

79

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ που είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$ και ισχύουν:

(i) $g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$ και

(ii) $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}$.

A. Αν η f δεν είναι σταθερή, να αποδείξετε ότι: $f(0)=1$

B. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ και $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx=0$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$

80

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x\in\mathbf{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $-1\leq x\leq 1$ $0\leq y\leq f(x)$.

(Ιούνιος 1992)

81

Αν $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x \, dx$, $\nu \in N^*$, τότε:

(i) Να υπολογίσετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει: $I_\nu = \dfrac{1}{\nu - 1} - I_{\nu-2}$

(ii) Να υπολογίσετε το I_5.

(Ιούνιος 1991)

82

Αν για μία πραγματική συνάρτηση g που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[\alpha,\beta]$ είναι $g'(\alpha) = g(\beta) = 2000$, να αποδείξετε ότι:

(i) $g(x) < 2000$ για $x \in [\alpha,\beta]$

(ii) $\int_\alpha^\beta g(x)\, dx < 2000(\beta - \alpha)$

83

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^3 - 2y^3 - 3y^2 + 2x^2 - 2x^2y - xy^2 + x + y - xy = 0$$

84

Αν η πραγματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$1+\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - e^x$, να βρεθεί ο τύπος της $\mathbf{f}$.

85

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g}$ ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[1998,2000]$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1998)\int_{2000}^{x} g(t)\,dt \quad , \; x \in [1998, 2000]$$

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1998,2000)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

(ii) Αν $g(x)>0$ για κάθε $x \in [1998,2000]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1998,2000)$ ώστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την c_g τον $x'x$ και τις ευθείες $x=\xi$, $x=2000$, να είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου που έχει βάση το μήκος $|\xi-1|$ και ύψος το $g(\xi)$.

86

Έστω $F(t) = \int_1^t (x-1)\,e^x\,dx$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} F(t)$

87

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{e}(e^{\beta} - e^{\alpha}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^x \, dx \leq e^{\beta^2}(e^{-\alpha} - e^{-\beta})$

για κάθε $\beta \geq \alpha > 1$.

88

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} \, dx \leq \frac{\pi}{4}$

89

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(i) Να υπολογίσετε: $I = \int_0^1 x^2 f(x) \, dx$

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\frac{e^{-1} - e}{2} \leq \int_{-1}^{1} e^x f(x) \, dx \leq \frac{e - e^{-1}}{2}$

90

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^x$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 (x f'(x) + f(x))\, dx$$

91

Έστω η πραγματική συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ η $g(x) > 0$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε:

$$\frac{1}{g(x_0)} \int_\alpha^\beta g(t)\, dt = (x_0 - \alpha)$$

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\int_\alpha^\xi \ln g(t)\, dt}{\int_\xi^\beta e^{g(t)}\, dt} = \frac{\ln g(\xi)}{e^{g(\xi)}}.$$

92

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Αν (ε) ειναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$.

(Ιούνιος 1994)

93

Δίνεται η συνάρτηση **f** με τύπο: $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\ ,\ x>0$.

(i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της **f**.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της **f**, τον άξονα **Ox** και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.

(Ιούνιος 1991)

94

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{1+x(\ln x-\ln(x+1)+1)}{x}$

(i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα σημεία καμπής.

(ii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες.

(iii) Να βρεθεί το $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_g τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha>1$.

(iv) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$.

95

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν τη σχέση: $xy^2+6xy-x^2y+9x-3x^2=0$.

96

Έστω η πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ ώστε $g(\alpha)=g(\beta)=2000$ και $\frac{1}{2000}\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=\beta-\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες στο (α,β).

(ii) Υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subset(\alpha,\beta)$ ώστε $g''(\xi)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g'(x)=0$)

97

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=(\ln x)^2$.

98

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των γραμμών $x^2+9y^2=9$ και $y=\frac{1}{9}(x-3)^2$.

99

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{e^{2x}(2x+1)-2x+1}{e^{2x}-1}$

(i) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες.

(ii) Να βρεθεί το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha>1$.

(iii) Να βρεθεί το $\lim_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$

100

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $g'(0)=2$ και $g(0)=1$. Αν ισχύει $g(x+y)+yg(x)+xg(y)=g(x)g(y)+xy+x+y$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(i) Να βρείτε τον τύπο της g.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η g^{-1}.

(iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1}, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

101

Να βρεθεί μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που πληρεί τη σχέση: $f(x)F(2-x)=x$, για $x\in\mathbb{R}_+^*$ και $f(1)=1$ όπου $F(x)$ είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}_+^*$.

102

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $f'(0)>0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για $\alpha>1$ ισχύει:

$$\int_{1/\alpha}^{\alpha}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)f(x)\,dx \geq 2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)f(1)$$

?

103

(i) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ με τύπο $\mathbf{f(x)=2|x|-x^2}$

(ii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$, τον άξονα $\mathbf{x'x}$ και τις ευθείες $\mathbf{x=-1}$ και $\mathbf{x=1}$.

104

Έστω $\mathbf{f}$ συνεχής στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = e-1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_0} \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{f(x_0)=e^{x_0}}$.

Βιβλιογραφία

1. Stojanović V., Mathematiskop, Kako da postanem šampion matematice, Za učenike koji rastu.

2. KVANT, Probleme de matematică, Traduse din Revista Sovietică.

3. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, ИЗБРАНОНЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ, АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА.

4. Kutepov A., Rubanov A., Problem book: Algebra and Elementary Functions, Mir Publishers, Moscow.

5. Giurgiu I. Turtoiu F., Culegere de probleme de matematică.

6. Bătinetu D.M., Sinteze Lyceum, Probleme de Matematică Pentru Treapta A II-A De Liceu, Editura Albatros.

7. Bugrov Ya.S., Nikolsky S.M. , Differential equations, multiple integrals, series, theory of functions of complex variable, Mir Publishers, Moscow.

8. ГОВОРОВ В. М., ДЫБОВ П. Т., МИРОШИН Н. В., СМИРНОВА С. Ф., СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ.

9. Efimov A.V., Mathematical Analysis, Advances Topics, General Functional Series and Their Application, Mir Publishers Moscow.

10. ДЕМИДОВИЧ Б. П., СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИ-ЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

11. КУДРЯВЦЕВ Л. Д., КЧТАСОВ А. Д., ЧЕХЛОВ В. И., ШАБУНИ М. И., СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

12. Larson L.C., Problem-Solving Through Problems, Springer-Verlag, N. York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

13. Les Corrigés, Maths D D´, Tous les Sujets du Bac 88 Corriges et Commentes.

14. Ionescu-Tiu C., Popescu M., PROBLEME ALESE DE MATEMATICÀ.

15. Ganga Mircea, TEME SI PROBLEME DE MATEMATICÀ.

16. Bugrov Ya. S., Nikolsky S.M., A COLLECTION OF PROBLEMS, Higher Mathematics, Mir Publishers, Moscow.

17. Shkluarsky D. O., Chentsov N. N., Yaglom I. M., Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics, Arithmetic and Algebra, Mir Publishers, Moscow.

18. Donciu N., Flondor D., Analiză Matematică, Culegere De Probleme, Pregătirea intensivă, probleme cu rezolvări complete pentru.

19. ЛЮБОМИР ДАВИДОВ, ЗАДАЧИ ЗА ПОЛИНОМИ, НАРОДНА ПРОРВЕТА.

20. Les Sujets du Bac Hachette, Mathématiques, séries A.B., Hachette Education.

21. Tchigique C., Liters J. L., Fauchot Y., Exercices Résolus Mathematiques, Hachette Education.

22. Yakovlev G., Algebra and Fundamentals of Analysis, Mir Publishers, Moscow.

23. Kurepa Svetozar, Uvod u Matematicu, Skupovi - Strukture - Brojevi, Tehnička Knjiga, Zagreb.

24. Nicolescu M.G., Nicolescu C.P., Analiză Matematică, Exerciti si probleme de Matematică Pentru Liceu, Editura Universal Pan. Bucuresti, 1995.

25. Nicolescu C.P., Teste de Analiză Mathematică, Sinteze Lyceum, Editura Albatros

26. АЛЕКСЕЕВ В. М., ЗЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА, РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, ВИЩА ЩКОЛА, 1983.

27. Qouin S., Perrinaud J.C., Porté D., Porté Dom., Rivoallan L., Audigier M.N., Bonnefond G., Daviaud D., Quitté C., Schuwer C., MATHEMATIQUES, Collection N. Dimathème, Terminales A1/B, Didier, Paris.

28. Cealera C., Udriste C., Balan B., ADMITEREA, IN ENUNTURI SOLUTII SI BAREME, MATEMATICA 1988 - 1995, Editura Tehnică.